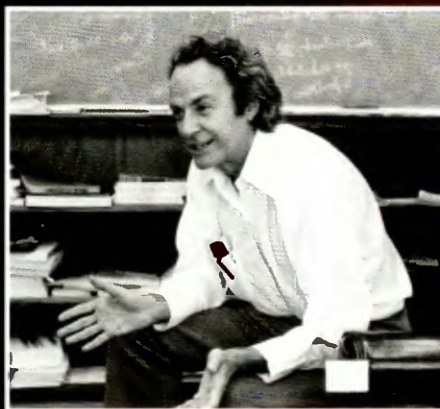


ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс



Ричард Фейнман
НОБЕЛЕВСКИЙ
ЛАУРЕАТ

ЗАДАЧИ *и* УПРАЖНЕНИЯ
с ответами и решениями

— 5·9 —

- 5 • Электричество и магнетизм
- 6 • Электродинамика
- 7 • Физика сплошных сред
- 8·9 • Квантовая механика



УРСС

Richard P. Feynman
Robert B. Leighton
Matthew Sands

THE FEYNMAN LECTURES ON PHYSICS
Exercises

Р. Фейнман, Р. Лейтон, М. Сэндс

ФЕЙНМАНОВСКИЕ ЛЕКЦИИ ПО ФИЗИКЕ

5·9

Задачи и упражнения
с ответами и решениями

Перевод с английского,
составление ответов и решений
*Ю. В. Конобеева, Г. Я. Коренмана,
В. И. Куштана, Н. С. Работнова*

Под редакцией
А. П. Леванюка

Издание четвертое



УРСС

Фейнман Ричард Ф., Лейтон Роберт Б., Сэндс Мэтью

Фейнмановские лекции по физике. Задачи и упражнения с ответами и решениями к вып. 5–9: Пер. с англ. / Под ред. А. П. Леванюка. Изд. 4-е.

М.: Едиториал УРСС, 2004. — 272 с.

ISBN 5–354–00707–0

Этот задачник можно рассматривать как дополнительный выпуск «Фейнмановских лекций по физике». В нем содержатся задачи с ответами и решениями по всем разделам общей физики. Идеи большинства задач были предложены основным автором лекций — лауреатом Нобелевской премии Р. Фейнманом. Задачи с решениями являются естественным дополнением к курсу лекций, но их можно использовать и независимо от него.

Книга рассчитана на преподавателей вузов, техникумов и средних школ, студентов и аспирантов, на руководителей школьных физических кружков. Часть материала можно использовать для подготовки к экзаменам при поступлении в физико-технические вузы.

Издательство «Едиториал УРСС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

Лицензия ИД № 05175 от 25.06.2001 г. Подписано к печати 09.03.2004 г.

Формат 60×90/16. Тираж 2000 экз. Печ. л. 17. Зак. № 3-1287/477.

Отпечатано в типографии ООО «РОХОС». 117312, г. Москва, пр-т 60-летия Октября, 9.

ISBN 5–354–00698–8 (Полное произведение)

ISBN 5–354–00707–0 (Задачи и упражнения
с ответами и решениями к вып. 5–9)

© Едиториал УРСС, 2004

	ИЗДАТЕЛЬСТВО	УРСС
	НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ	
	E-mail: URSS@URSS.ru	
	Каталог изданий	
	в Internet: http://URSS.ru	
Тел./факс: 7 (095) 135–42–16		
Тел./факс: 7 (095) 135–42–46		

2429 ID 20604



9 785354 007073 >

Все права защищены. Никакая часть настоящей книги не может быть воспроизведена или передана в какой бы то ни было форме и какими бы то ни было средствами, будь то электронные или механические, включая фотокопирование и запись на магнитный носитель, а также размещение в Интернете, если на то нет письменного разрешения Издательства.

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

К главе 1. Электромагнетизм

1. 1. Электрические силы и силы гравитации.

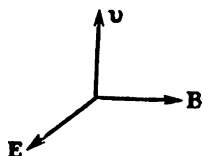
- а) Какой должна была бы быть масса протона, чтобы сила гравитационного притяжения между двумя покоящимися протонами по величине совпадала с силой их электрического отталкивания? Каково отношение этой массы к обычной массе протона?
- б) Какой была бы величина силы электростатического взаимодействия двух монет по 1 копейке, помещенных на противоположных концах лекционной доски, ширина которой равна 10 м, если бы заряды ядер и электронов этих монет компенсировали себя лишь с точностью до 1%? Можете ли вы себе представить тело, вес которого по величине совпадал бы с этой силой?

1. 2. Оцените приблизительно работу, которую необходимо затратить на преодоление силы электрического отталкивания при образовании ядра урана из двух одинаковых половинок. Чему равна эта работа при образовании ядра гелия из двух дейтронов? Выразите оба ответа в киловатт-часах на килограмм.

1. 3. На каждый атом меди приходится один электрон проводимости. Какова средняя скорость электронов проводимости, если через медный провод диаметром 0,2 мм течет ток 10 а? Чему равно в этом случае отношение v^2/c^2 ? (Напомним, что отношение «магнитных» эффектов к «электрическим» такого же порядка.)

1. 4. В области пространства создано однородное электрическое поле E напряженностью 10 000 в/см, направленное вдоль оси x , а также однородное магнитное поле B , направленное вдоль оси y . Через эту область в направлении оси z по прямой линии движется пучок μ -мезонов со скоростью, равной $c/3$.

- а) Какова напряженность магнитного поля B ? (Масса заряженного μ -мезона равна 207 электронным массам, а его заряд по величине совпадает с зарядом электрона.)



- б) Можно ли с помощью этого эксперимента определить знак заряда мюона?

1. 5. а) В некоторой области пространства создано постоянное однородное магнитное поле $B_x = 0$, $B_y = 0$ и $B_z = B_0$. Электрических полей и токов в этой области пространства нет. Из начала координат в положительном направлении оси x со скоростью v вылетает частица массой m с положительным зарядом q . Найдите траекторию частицы.
- б) Предположите, что $B_x = 0$, $B_y = 0$, а $B_z = B_0 + ax$, где ax всюду мало по сравнению с B_0 . Опишите качественно траекторию частицы [см. работу Шарпака с сотрудниками, опубликованную в «Physical Review Letters», 6, 128 (1961), где подобное поле использовалось в одном ответственном эксперименте].
- в) Покажите, что магнитное поле такого вида не удовлетворяет уравнениям Максвелла, если оно замкнуто в конечном объеме или, как предполагалось выше, в объеме отсутствуют токи или электрическое поле.
1. 6. В поле неподвижного отрицательного точечного заряда, расположенного в начале координат, а также в однородном магнитном поле B_0 , направленном в положительном направлении оси z , из точки $x = z = 0$, $y = a$ движется частица массой m с положительным зарядом q и малой скоростью $v = v_0 e_x$.
- а) При какой величине напряженности поля B_0 траектория частицы будет представлять собой окружность радиусом a с центром в начале координат?
- б) Объясните, почему в том случае, когда напряженность магнитного поля отличается от найденной, скорость частицы зависит только от ее расстояния до начала координат.
- в) Схематически нарисуйте несколько витков траектории частицы, когда частица начинает свое движение из точки $x = z = 0$, $y = a$ с нулевой скоростью.

К главе 2. Дифференциальное исчисление векторных полей

2. 1. Медная проволока радиусом $a = 1$ мм равномерно покрыта слоем изоляции, внешний радиус которого равен b . Электрическим током проволока нагревается до температуры T_1 , при этом температура внешней поверхности изоляционного покрытия T_2 остается почти комнатной.

а) Чему равен ∇T внутри покрытия? Ответ выразить в переменных a, b, T_1 и T_2 .

б) Чему равна разность температур $T_1 - T_2$, если через медную проволоку, покрытую слоем резины (толщина $0,2$ см, коэффициент теплопроводности $1,6 \cdot 10^{-3}$ вт/см·град), течет ток 20 а?

2. 2. Вычислением «в лоб» покажите, что

а) $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$,

б) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$.

2. 3. Покажите, что если $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку x, y, z , то

а) $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$,

б) $\nabla \times \mathbf{R} = 0$,

в) $\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = 0$,

г) $\nabla \times \left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = 0$,

д) $\nabla \left(\frac{1}{R} \right) = -\frac{\mathbf{R}}{R^3}$.

(при $R \neq 0$).

е) Из равенства (б) и формулы (2.46) «Лекций» (вып. 5, стр. 42) следует, что вектор $\mathbf{R}$ можно представить в виде $\mathbf{R} = \nabla \phi$. Найдите функцию ϕ .

2. 4. Уравнения Максвелла имеют вид

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (3)$$

$$c^2 \nabla \times \mathbf{B} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{\mathbf{j}}{\epsilon_0}. \quad (4)$$

Закон сохранения заряда можно записать в виде

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (5)$$

- а) Покажите, что уравнения 3 и 2 совместны.
 б) Покажите, что уравнение 5 можно получить, взяв дивергенцию от левой и правой частей уравнения 4 (т. е. убедитесь, что уравнения Максвелла справедливы лишь при выполнении закона сохранения заряда).
 в) Покажите, что в пустоте ($j = 0$, $\rho = 0$) поле E удовлетворяет волновому уравнению

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

- г) Покажите, что в пустоте поле B удовлетворяет такому же волновому уравнению

$$\nabla^2 B - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 B}{\partial t^2} = 0.$$

- д) Покажите, что, согласно уравнению 2, поле E можно представить в виде $E = -\nabla\phi - (\partial A/\partial t)$, где A — векторный потенциал магнитного поля $B = \nabla \times A$. Почему вектор B может быть представлен в таком виде?

2. 5. Пусть $v(x, y, z)$ — поле скоростей твердого тела, вращающегося вокруг некоторой оси. Покажите, что

а) $\nabla \cdot v = 0$,

б) $\nabla \times v = 2\omega$,

где ω — вектор угловой скорости.

2. 6. Покажите прямым вычислением, что если A — постоянный вектор, а R — радиус-вектор, то

$$\text{rot}(A \times R) = 2A.$$

Если, однако, в хорошо известную формулу

$$B \times (A \times C) = A(B \cdot C) - (B \cdot A)C$$

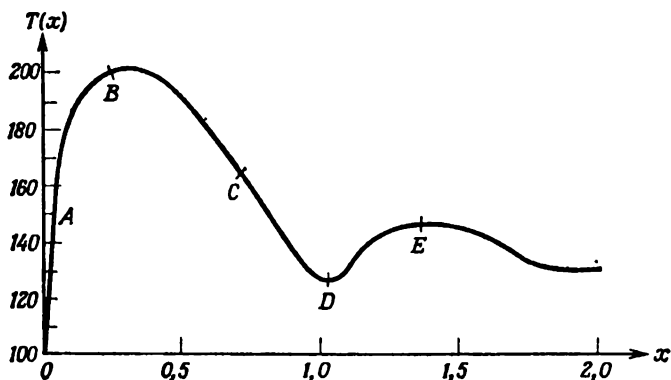
вместо векторов B и C формально подставить ∇ и R , то получится неверный результат

$$\nabla \times (A \times R) = A(\nabla \cdot R) - (\nabla \cdot A)R = 3A.$$

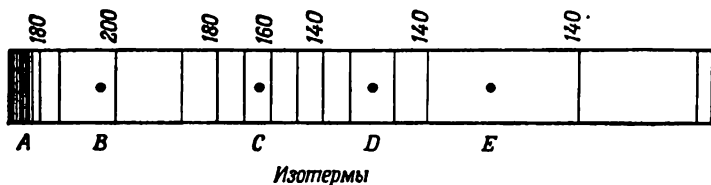
В чем тут дело?

2. 7. Длинный стальной стержень подвергается некоторой термической обработке, в результате чего в некоторый момент времени после начала остывания стержня распределение температуры $T(x)$ вдоль стержня имеет вид, изображенный на фиг. 1. Изотермы, нанесенные с интервалом температур в 10°C , изображены на фиг. 2. Будем предполагать, что температура в каждой точке стержня

зависит только от расстояния x до конца стержня. Нарисуйте в точках A, B, C векторы, направление и длина которых совпадают с направлением и величиной ∇T . В какой из пяти отмеченных точек дивергенция теплового потока $\mathbf{h}$ максимальна? В каких из пяти точек $\nabla \times \mathbf{h} = 0$?



Фиг. 1.



Фиг. 2.

К главе 3. Интегральное исчисление векторов

3. 1. а) Уравнения Максвелла в гл. 1 «Лекций» были сформулированы в интегральной форме (хотя и словесно), а в гл. 2 — в дифференциальной форме. Покажите, что обе формы уравнений Максвелла эквивалентны.
б) Покажите, что уравнение

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

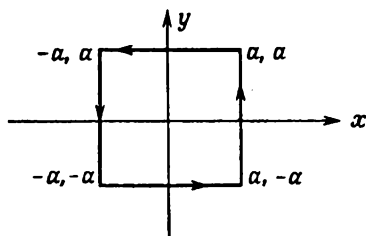
где ρ — плотность зарядов, а $\mathbf{j}$ — вектор плотности тока, есть не что иное, как закон сохранения заряда.

3. 2. Поверхность шара равномерно покрыта слоем радиоактивного вещества, которое испускает α -частицы высокой энергии. Вообразим, что α -частицы вылетают только наружу от поверхности шара, причем только в радиальном направлении. С поверхности шара тем самым стекают заряды, т. е. течет некоторый ток. Создает ли этот ток магнитное поле?
3. 3. Напряженность электрического поля точечного заряда, помещенного в начало координат, имеет вид

$$E = \frac{K}{r^3} \mathbf{r}, \text{ где } r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \mathbf{r} = ix + jy + kz$$

(K — некоторая постоянная).

- а) Вычислите поток вектора напряженности электрического поля E через поверхность сферы радиуса a , центр которой совпадает с зарядом.
- б) Воспользовавшись теоремой Остроградского — Гаусса, представьте поток вектора E через поверхность сферы в виде объемного интеграла от $(\nabla \cdot E)$. Можете ли вы объяснить полученный вами результат?
- в) Вычислите циркуляцию вектора E вдоль контура, изображенного на рисунке (контур лежит в плоскости xy).



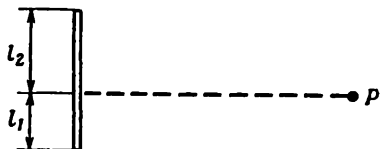
Убедитесь в правильности полученного результата, воспользовавшись теоремой Стокса.

3. 4. Воспользовавшись решением задачи 2.3(а), получите формулу (практически бесполезную) для произвольного объема в виде интеграла по поверхности этого объема. Убедитесь в правильности вашего ответа для шара и прямоугольного параллелепипеда.

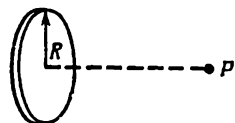
К главе 4. Электростатика

4. 1. Найдите потенциал φ в точке P , удаленной на расстояние r от заряженной нити длиной $l_1 + l_2$ м. Линейная плотность зарядов на нити равна λ (см. рисунок).

Сравните полученный результат с тем, которого следует ожидать в случае $r \gg (l_1 + l_2)$. Проверьте ваш ответ в предельном случае $r \ll (l_1 + l_2)$, сравнив напряженности электрического поля, найденные с помощью Φ и по теореме Гаусса.

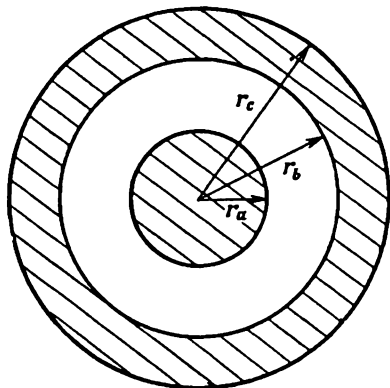


4. 2. Вычислите напряженность электрического поля в точке P , расположенной на оси тонкого равномерно заряженного диска радиуса R на расстоянии r от его центра.



4. 3. Две металлические сферы имеют общий центр, причем внутренней из них сообщен заряд q' , а внешней — заряд q .

- Найдите зависимость электрического потенциала от радиуса на далеких расстояниях.
- Найдите зависимость напряженности электрического поля от радиуса.
- Чему равен потенциал на поверхности внутренней сферы?
- Как изменится электрическое поле на расстояниях $r > r_c$ и $r_b < r < r_c$, если центры внутренней и внешней сфер слегка разойдутся?

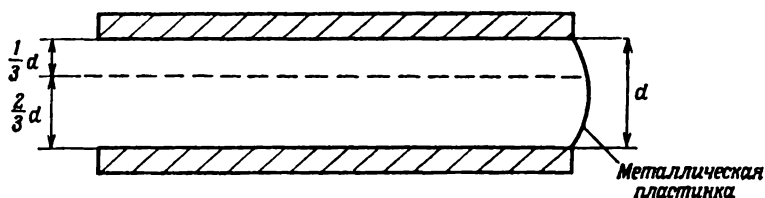


К главе 5. Применения закона Гаусса

5. 1. Покажите, что электрический потенциал Φ обладает следующим интересным свойством: среднее значение Φ на воображаемой сферической поверхности равно значению

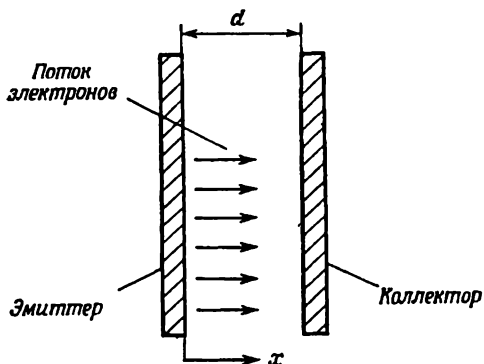
$\varphi(0)$ в центре этой сферы *при условии*, что внутри сферы нет никаких зарядов. В каких задачах, по вашему мнению, удобно воспользоваться этим свойством?

5. 2. Найдите напряженность электрического поля во внутренних точках очень длинного равномерно заряженного цилиндра, достаточно удаленных от его концов. Чем отличается результат от получающегося в случае равномерно заряженного шара?
5. 3. Две широкие параллельные металлические пластины расположены одна над другой на расстоянии d . Края этих пластин соединены металлическим проводом. Между пластинами на расстоянии $\frac{1}{3}d$ ниже верхней пластины натянута тонкая равномерно заряженная пластмассовая пленка, на единицу площади которой приходится заряд σ . Найдите напряженности электрического поля E_1 и E_2 вблизи верхней и нижней пластин.



5. 4. Найдите выражение для x -компоненты электрического поля, если плотность зарядов ρ в пространстве зависит только от x .
5. 5. В электронной лампе электроны вылетают из раскаленной металлической пластины (катод) и собираются на плоской металлической пластине (анод), расположенной параллельно эмиттирующей поверхности на расстоянии d от нее. (Расстояние d предполагается малым по сравнению с размерами обеих пластин.) Потенциал электрического поля между пластинами меняется по закону $\varphi = kx^{1/2}$, где x — расстояние от эмиттера.
- а) Чему равна плотность поверхностных зарядов на эмиттере? На коллекторе?

- б) Как меняется плотность объемного заряда $\rho(x)$ в пространстве между пластинами, т. е. в интервале $0 < x < d$?



5. 6. Пусть на поверхности проводника распределены заряды с плотностью σ кулон/м², где σ — вообще говоря, переменная величина. Покажите, что сила, действующая на заряд, заключенный в элементарной площадке dA , нормальная к поверхности проводника и равна $\frac{1}{2}(\sigma^2/\epsilon_0)dA$. (Множитель $\frac{1}{2}$ правилен. Объясните, почему он возникает?)
5. 7. Максимальная напряженность электрического поля, которое может существовать на поверхности проводника, граничащего с вакуумом, по порядку величины равна 10 в/м. Полагая, что поверхностный заряд, создающий это поле, отрицателен, сравните число избыточных электронов, приходящееся на единицу площади, с числом атомов, приходящихся на ту же площадь. Сравните величину силы, действующей на электрон в таком поле, с величиной силы, которую испытывает электрон в поле протона на расстояниях порядка атомных.
5. 8. Отрицательный мюон (μ -мезон) — это частица, заряд которой равен заряду электрона, а масса в 207 раз тяжелее массы электрона. При торможении в веществе отрицательный мюон может быть захвачен ядром какого-нибудь атома и заместить один из вращающихся вокруг ядра электронов, образовав «мезоатом». Так как масса мюона велика, то размер его орбиты во много раз меньше размеров орбит атомных электронов; например, для тяжелых ядер орбита мюона, соответствующая его наименьшему энергетическому состоянию, даже находится внутри ядра. Мюон взаимодействует с ядерным веществом с помощью не ядерных сил, а электрических, причем ядро им

воспринимается как равномерно заряженный шар. Из независимых экспериментов было найдено, что радиус ядра зависит от суммарного числа протонов и нейтронов (A) следующим образом: $R = R_0 \cdot A^{1/3}$ ($R_0 \approx 1,2 \cdot 10^{-15}$ м). Рассмотрим модель мезоатома свинца, в котором мюон осциллирует относительно центра ядра вдоль произвольной линии, проходящей через этот центр. Чему равна собственная частота ω таких осцилляций? Вы уже знаете, что квантовые уровни гармонического осциллятора разделены друг от друга энергией $\hbar\omega$. Чему равна разность энергий двух самых низких состояний мезоатома в рассматриваемой модели? Экспериментально было обнаружено, что при образовании мезоатомов в свинце испускаются γ -лучи с энергией 6 Мэв. Как бы вы интерпретировали этот факт?

5. 9. Представьте себе, что через земной шар по диаметру прорыт туннель. Плотность пород, образующих земной шар, можно считать постоянной. Покажите, что если в этот туннель бросить какой-то предмет, то он будет совершать колебания относительно центра земного шара с периодом, равным периоду обращения спутника, запущенного вокруг Земли на небольшой высоте над ее поверхностью.

5.10. Известно, что за год Земля выделяет тепловую энергию, примерно равную $Q = 8 \cdot 10^{20}$ Дж. Не строя последовательной теории этого явления, можно рассмотреть несколько весьма упрощенных моделей, позволяющих сделать правильные оценки по порядку величины. В качестве примера рассмотрим модель, согласно которой все тепло создается в результате распада радиоактивных веществ, однородно распределенных по объему земного шара: кинетическая энергия испускаемых ими частиц полностью переходит в тепло.

По существующим оценкам температура в центре Земли примерно равна 2500°C , а теплопроводность земных пород в среднем равна $0,03$ Дж/см·сек·град. Находится ли описанная выше модель в согласии с этими оценками?

5.11. Два длинных коаксиальных проводящих цилиндра заряжены так, что на большом расстоянии от их концов на единицу длины внутреннего цилиндра приходится λ_1 кулонов, а на единицу длины внешнего цилиндра λ_2 кулонов. Внутренний и внешний радиусы внутреннего цилиндра равны r_1 и r_2 , а внешнего цилиндра равны r_3 и r_4 . Найдите поле $E(r)$ в точках, расположенных вблизи середины цилиндров (т. е. там, где краевыми эффектами мож-

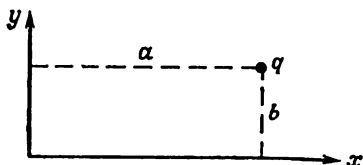
но пренебречь). Определите разность потенциалов между цилиндрами.

Опишите качественно, в какую сторону будут меняться напряженность поля и разность потенциалов, если:

- 1) r_1 будет уменьшаться;
- 2) r_2 будет увеличиваться;
- 3) внешний контур сечения внутреннего проводника имеет форму квадрата со сторонами, равными $2r_2$ (при этом предполагается, что $\sqrt{2}r_2 < r_3$)?

К главе 6 и 7. Электрическое поле в разных физических условиях

6. 1. Методом изображений найдите силу, действующую на заряд q , помещенный на расстояниях a и b от двух проводящих полуплоскостей, образующих между собой прямой угол.



6. 2. Частица с зарядом q , в начальный момент времени закрепленная на расстоянии x_0 от поверхности заземленной проводящей плоскости, освобождается и начинает двигаться по направлению к поверхности.
- а) Как зависит кинетическая энергия частицы от расстояния x до поверхности? (Потерями энергии частицы на излучение пренебречь.) Есть ли что-нибудь нефизическое в вашем ответе?
 - б) Реальную металлическую пластинку можно рассматривать как идеальную проводящую плоскость лишь на расстояниях, превышающих межатомные, т. е. лишь до расстояний примерно 2—3 Å. Оцените кинетическую энергию электрона, который в момент $t = 0$ был освобожден на расстоянии 1 см от проводящей пластинки. Ответ выразить в электронвольтах.
6. 3. Прямоугольный пластмассовый брусок с размерами 1 см × 10 см × 100 см равномерно заряжен. Плотность зарядов равна ρ кулон/см³. Нарисуйте примерный ход потенциала φ как функции расстояния до центра бруска вдоль прямой линии, перпендикулярной стенке с размерами 10 см × 100 см и проходящей через центр бруска.

Рассмотрите интервал расстояний от $0,001 \text{ см}$ (внутри бруска) до расстояний, во много раз превышающих 100 см . Масштаб возьмите логарифмический, т. е. нарисуйте $\log \varphi$ как функцию логарифма расстояния. На том же графике нарисуйте кривую зависимости напряженности электрического поля E от расстояния.

6. 4. Земля непрерывно облучается космическими лучами высокой энергии, приходящими из пространства вне Солнечной системы. С помощью измерений, выполненных на зондах и спутниках, было установлено, что космические лучи в основном состоят из протонов и лишь малую часть их составляют α -частицы, тяжелые ядра и электроны. Средняя энергия протонов в космических лучах оказалась равной нескольким миллиардам электронвольт; интенсивность потока протонов, достигающих земной атмосферы, примерно равна одному протону в секунду на 1 см^2 . Интересно, какое время необходимо, чтобы заряженные частицы космических лучей подняли потенциал Земли настолько, чтобы протоны уже не могли попасть на поверхность Земли из-за электрического отталкивания? Великоли это время по сравнению с возрастом Земли, оцениваемым примерно в 5 миллиардов лет? Если это время меньше возраста Земли, то почему космические лучи продолжают достигать ее поверхности?
6. 5. Определите емкость, приходящуюся на единицу длины бесконечного цилиндрического конденсатора, изготовленного из двух проводящих коаксиальных цилиндров, радиусы которых равны a (внутренний цилиндр) и b . Ответьте качественно на вопрос, что случилось бы, если бы в конструкции конденсатора оказались дефекты, скажем на поверхности внешнего цилиндра имелся бы острый выступ?
6. 6. а) Чему равна плотность поверхностных зарядов, индуцированных на поверхности незаряженной изолированной проводящей сферы, центр которой расположен на расстоянии b от точечного заряда q ?
- б) Чему равна сила, действующая на заряд со стороны сферы, если потенциал последней равен V ?
6. 7. В гл. 6 «Лекций» (вып. 5) на основе качественных рассуждений было показано, что электрическое поле вне сферы, плотность поверхностных зарядов на которой меняется в зависимости от полярного угла θ как $\cos \theta$, можно

себе представить как суперпозицию электрических полей двух слабо сдвинутых относительно друг друга и противоположно заряженных шаров. Покажите теперь это путем вычислений и найдите электрическое поле как *вне*, так и *внутри* сферы, считая, что плотность поверхностных зарядов на ней зависит от полярного угла θ : $\sigma(\theta) = A \cos \theta$, где A — некоторая постоянная.

6. 8. Поле электрического диполя определяется выражениями (6.14) и (6.15) «Лекций» (вып. 5, стр. 113, 114).

а) Найдите радиальную и тангенциальные составляющие вектора напряженности электрического поля диполя в точке (r, θ, φ) .

б) Покажите, что электрическое поле диполя направлено в одну и ту же сторону во всех точках прямой, проходящей через диполь.

в) Найдите направление и относительные величины напряженности E на некотором произвольном расстоянии от диполя в точках, определяемых углами $0, \pi/4$, и $\pi/2$, отсчитанными от направления вектора p ?

6. 9. Пусть диполь находится в однородном электрическом поле с напряженностью E_0 .

а) Если направление дипольного момента совпадает с направлением электрического поля, то существует эквипотенциальная поверхность, охватывающая диполь. Покажите, что такой поверхностью является сфера, и найдите величину дипольного момента, для которой сфера имеет радиус a .

б) Опишите электрическое поле вне этой сферы.

в) Изменится ли электрическое поле, если с этой эквипотенциальной поверхностью совпадет тонкая проводящая сфера, заряженная до того же потенциала?

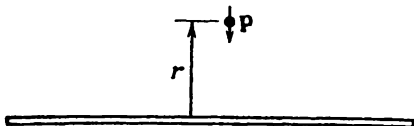
г) Как будут распределены заряды на проводящей сфере?

д) Каким дипольным моментом будет обладать это распределение зарядов?

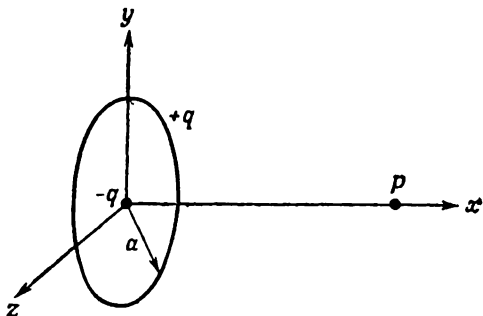
е) Как бы вы использовали полученные результаты?

6.10. Частица с дипольным моментом p помещена на расстоянии r от длинного провода, на единицу длины которого приходится заряд λ (λ — константа). Вектор дипольного момента расположен в плоскости, проходящей через провод и частицу.

- а) Чему равна сила, действующая на частицу, и момент этой силы, если вектор $\mathbf{p}$ направлен нормально к проводу?
- б) Чему равна сила, действующая на частицу, и момент силы, если вектор $\mathbf{p}$ параллелен проводу?



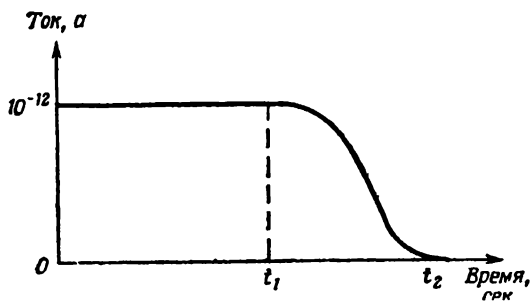
- 6.11. Найдите потенциал, создаваемый большой пластиной, на единицу площади которой приходится N диполей, как функцию расстояния от этой пластины. Считайте, что все диполи обладают одинаковым дипольным моментом $\mathbf{p}$, направленным перпендикулярно поверхности пластины.
- 6.12. Электрический заряд $+q$ равномерно распределен по тонкому кольцу радиуса a . Центр кольца совпадает с началом координат, а плоскость кольца совпадает с плоскостью yz . В начале координат помещен заряд $-q$.
- а) Найдите потенциал φ в точке P , расположенной на оси x на расстоянии x от начала координат.
- б) Чему равно электрическое поле в этой точке?
- в) Как зависит электрическое поле от x на расстояниях $x \gg a$? Убывает ли оно быстрее электрического поля диполя на больших расстояниях? Как это объяснить?



- 6.13. Плоский конденсатор емкостью 100 пф , расстояние между обкладками которого 1 см , заряжается с помощью батареи до разности потенциалов 10 в . После этого батарея отключается. Нижняя пластина конденсатора затем облучается синим светом, выбивающим из нее электроны, кинетическая энергия которых лежит в интервале от 0 до $1,5 \text{ эв}$. Обкладки заряжены так, что электроны притяги-

ваются к верхней из них. На приведенном рисунке показана зависимость от времени полного тока, текущего на верхнюю пластину конденсатора. Сколько времени понадобится для того, чтобы разность потенциалов на обкладках обратилась в нуль (время t_1 на рисунке)? Чему равна разность потенциалов в момент времени $t \gg t_2$? Как изменится ваш ответ, если *перед* зарядкой конденсатора расстояние между пластинами увеличить вдвое?

Как изменится ваш ответ, если расстояние между пластинами было увеличено вдвое лишь *после того*, как конденсатор был полностью заряжен и батарея отключена?



6.14. Палочка из изолятора длиной 1 м и радиусом $R = 1$ см вытянута вдоль оси x так, что ее концы расположены в точках с координатами $x = 0,5$ м и $x = -0,5$ м. Плотность объемного заряда в палочке равна $\rho = ar^2$, где r — расстояние до оси палочки, а a — положительная постоянная, равная 2 кулон/м⁵.

- Найдите напряженность электрического поля E в четырех точках $x = 0$, $z = 0$, $y = 0, 0,5, 1,0$ и $2,0$ см. В этой части задачи считайте палочку бесконечно длинной.
- Дайте разумную оценку потенциала в точке $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, взяв за нуль потенциала его значение на бесконечности. Укажите неопределенность вашей оценки и обоснуйте ее.
- Будет ли потенциал в точке $x = 0,5$ м, $y = z = 0$ больше, меньше или равен потенциалу в начале координат?

7. 1. а) Покажите, что эквипотенциальные поверхности вокруг двух параллельных противоположно заряженных нитей представляют собой цилиндры вращения. Расстояние между нитями равно d , линейная плотность зарядов на них равна $+\lambda$ и $-\lambda$ кулон/м соответственно.

- б) Используя результат предыдущей части задачи, найдите емкость, приходящуюся на единицу длины двух параллельных проводов с радиусом поперечного сечения r_0 , оси которых находятся друг от друга на расстоянии d . Считайте, что $d \gg 2r_0$.
- в) Покажите, что при $x, y > d$ потенциал может быть представлен в комплексном виде

$$f(z) \equiv U + iV = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy}.$$

К главе 8. Электростатическая энергия

8. 1. Согласно ли вы с утверждением, содержащимся в гл. 8 «Лекций» (вып. 5), что электростатическая энергия ядра, содержащего Z протонов, более или менее однородно распределенных по объему сферы радиусом r , примерно равна величине

$$U = \frac{3}{5} Z(Z-1) \frac{e^2}{r} ?$$

8. 2. Максимальная емкость конденсатора настройки в радиоприемнике равна 100 пф. Путем поворота подвижных пластин емкость конденсатора может быть уменьшена до 10 пф. Предположим, что конденсатор заряжен до разности потенциалов 300 в, когда его емкость максимальна. Затем ручка настройки поворачивается и емкость конденсатора становится минимальной. Чему равна работа, совершенная при повороте ручки настройки?
8. 3. Заряды на обкладках двух конденсаторов емкостью C_1 и C_2 равны q_1 и q_2 . Покажите, что, за исключением особых случаев, запасенная электростатическая энергия конденсаторов уменьшается, если они соединяются параллельно. Куда при этом девается энергия? Найдите условия, при которых соединение конденсаторов не приводит к потере энергии.
8. 4. а) Покажите, что в электрическом поле E электростатическая энергия диполя с дипольным моментом p равна
- $$U = -p \cdot E.$$
- б) Вычислите момент силы, действующей на диполь в электрическом поле E . Сделайте это как прямым путем, так и с помощью приведенного выше выражения для энергии диполя. Будет ли энергия диполя той же самой, если он создан путем последовательного помещения его зарядов в электрическое поле? Если нет, то

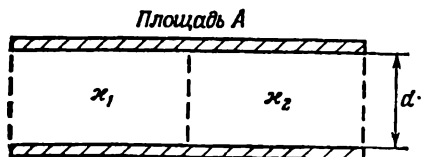
вычислите разность энергий; если да, то приведите физические соображения в защиту вашего утверждения.

8. 5. Покажите, что обкладки плоского конденсатора притягивают друг друга с силой $F = q^2/2\epsilon_0 A$ (A — площадь обкладки). Найдите работу, которую необходимо затратить, чтобы расстояние между обкладками увеличить с x до $x + dx$.
8. 6. Известно, что пион (π -мезон) может находиться в трех различных зарядовых состояниях. Иными словами, существуют положительный, отрицательный и нейтральный пионы. Масса (умноженная на c^2) заряженного пиона равна $139,6 \text{ Мэв}$, масса же нейтрального пиона равна 135 Мэв . В одной из моделей пиона предполагается, что различие масс определяется лишь электростатической энергией. Если далее предположить, что заряженные пионы имеют сферическую форму и заряд равномерно распределен по их объему, то можно вычислить радиус пиона. Вычислите радиус пиона в этих предположениях. Находится ли ваш результат в согласии с существующими оценками размеров ядер?
8. 7. Внутренний радиус металлической сферической оболочки равен a , ее внешний радиус равен b , а центр находится в начале координат. В оболочке просверлено небольшое отверстие. Полный заряд оболочки равен нулю. Какую работу нужно затратить, чтобы заряд q_1 перевести из бесконечности через отверстие в начало координат? Чему равна эта работа, если полный заряд оболочки равен q_2 ?

К главе 10. Диэлектрики

10. 1. Пространство между обкладками плоского конденсатора заполнено диэлектриком, состоящим из двух половинок равных размеров, но с разными диэлектрическими проницаемостями κ (см. рисунок). Покажите, что емкость такого конденсатора равна

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$



10. 2. Расстояние между обкладками плоского конденсатора, имеющими форму квадратов с площадью 400 см^2 , равно 1 см . С помощью электрической батареи конденсатор заряжается до разности потенциалов 10 в , а затем отключается от нее. После этого между обкладками конденсатора вставляется широкая пластина из диэлектрика толщиной, немного меньшей 1 см , причем так, что остается закрытой лишь площадь $10 \times 20 \text{ см}^2$. Диэлектрическая проницаемость пластины равна 4.
- а) Чему равна сила притяжения обкладок конденсатора друг к другу?
 - б) Чему равен дипольный момент единицы объема диэлектрика внутри, но достаточно далеко от краев конденсатора (чтобы можно было пренебречь краевыми эффектами)?
 - в) Предположим, что внутри диэлектрика с диэлектрической проницаемостью 4,0 равномерно распределены маленькие металлические шарики. Будет ли при этом разность потенциалов на пластинах конденсатора больше, меньше или равна той, которая существовала бы в случае однородного диэлектрика?



10. 3. Емкость плоского конденсатора с воздушным промежутком толщиной d между его пластинами равна C_0 . Между пластинами конденсатора вдвигается брусок из изолятора с диэлектрической проницаемостью κ , толщиной $t < d$ и площадью, равной площади пластин конденсатора, причем так, что его плоскости параллельны пластинам. Пренебрегая краевыми эффектами, покажите, что емкость конденсатора при этом становится равной

$$C = \frac{C_0}{1 - [(\kappa - 1)/\kappa] (t/d)}.$$

10. 4. Изолированному металлическому шару радиусом a сообщен заряд Q . Поверхность шара равномерно покрыта слоем диэлектрика с внутренним радиусом a и внешним радиусом b .
- а) Вычислите поверхностный заряд, наведенный на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика.
 - б) Найдите, чему равна плотность наведенных зарядов в объеме диэлектрика.
10. 5. Плоский конденсатор подключен к электрической батарее, поддерживающей на его пластинах разность потен-

циалов V_0 . В пространство между обкладками конденсатора вдвигается пластина из диэлектрика с диэлектрической проницаемостью κ так, что это пространство полностью заполняется диэлектриком.

а) Покажите, что при этом электрической батареей совершается работа $q_0 V_0 (\kappa - 1)$, где q_0 — заряд на обкладках конденсатора до заполнения его диэлектриком.

б) Какую работу при заполнении конденсатора диэлектриком совершают механические силы? Совершается ли эта работа над диэлектриком или самим диэлектриком?

10. 6. Две коаксиальные трубки радиусами a и b ($a < b$) погружаются вертикально в масляную ванну. Покажите, что, если между трубками существует разность потенциалов V , масло в них поднимется на высоту

$$h = \frac{2V^2 (\kappa - 1) \epsilon_0}{\ln(b/a) \rho (b^2 - a^2) g},$$

где κ — диэлектрическая проницаемость масла.

10. 7. Покажите, что силовые линии электрического поля, пересекающие поверхность раздела двух диэлектриков с диэлектрическими проницаемостями κ_1 и κ_2 , образуют с нормалью к этой поверхности углы θ_1 и θ_2 , связанные соотношением $\kappa_1 \operatorname{ctg} \theta_1 = \kappa_2 \operatorname{ctg} \theta_2$.

К главе 11. Внутреннее устройство диэлектриков

11. 1. Найдите электрическое поле внутри и вне однородно поляризованного шара радиусом a (см. фиг. 11.7, вып. 5, стр. 226).

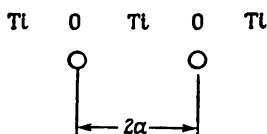
11. 2. Диэлектрическая проницаемость газа гелия при 0°C и давлении 1 атм равна 1,000074. Найдите дипольный момент атома гелия в однородном электрическом поле напряженностью 100 в/см.

11. 3. Диэлектрическая проницаемость водяного пара, газа полярных частиц, весьма заметно зависит от температуры. В приведенной ниже таблице представлены экспериментальные данные по исследованию этой зависимости. Считая водяной пар идеальным газом, вычислите поляризуемость его молекул как функцию температуры и начертите график этой зависимости, откладывая по оси абсцисс

обратную температуру. По наклону кривой определите дипольный момент молекулы воды.

T, K	Давление, см рт. ст	$(\kappa - 1) \cdot 10^5$
393	56,49	400,2
423	60,93	371,7
453	65,34	348,8
483	69,75	328,7

11. 4. Рассмотрите систему, состоящую из двух атомов, расположенных на расстоянии a друг от друга. Поляризуемость каждого атома равна α . Найдите связь между a и α , при которой эта система будет сегнетоэлектриком. (Ответ: $\alpha = 2\pi a^3$.) Если эта задача покажется вам слишком простой, рассмотрите линейную цепочку атомов кислорода, расположенных на расстоянии $2a$ друг от друга, между каждой парой которых находится атом титана.



Найдите соотношения между a и поляризуемостями атома кислорода α_O и атома титана α_{Ti} , при котором такая система будет сегнетоэлектриком.

Примечание:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \approx 1,2.$$

11. 5. «Диэлектрик» представляет собой пространственную решетку регулярно расположенных стеклянных шариков диаметром d с минимальным расстоянием между соседними шариками, равным $3d$. Предполагая, что поляризация, наведенная во внешнем электрическом поле в каждом стеклянном шарике, не зависит от наличия остальных (т. е. пренебрегая перераспределением наведенных зарядов благодаря взаимному влиянию шариков), найдите диэлектрическую проницаемость такого «диэлектрика».

К главе 12. Электростатические аналогии

12. 1. Из медной проволоки диаметром поперечного сечения b сделано кольцо радиусом a , причем $b \ll a$. Кольцо помещено в центр пластмассового шара, радиус которого во

много раз больше радиуса кольца. Переменным магнитным полем в кольце наводится ток. Ток нагревает проволоку, причем в единицу времени в кольце выделяется W тепла (в дж/сек). Температура на поверхности шара равна T_0 . Чему равна температура в центре шара в стационарном случае?

12. 2. В задаче 5.10 была рассмотрена одна из простейших моделей для описания теплового баланса Земли. Другая модель (тоже сильно упрощенная) основана на предположении, что внутри Земли существует ядро радиусом a с предельно высокой теплопроводностью. Найдите, какого размера должно быть это ядро, считая его температуру равной 2500°C , а коэффициент теплопроводности окружающих ядро пород равным $0,03 \text{ дж/см}\cdot\text{сек}\cdot\text{град}$ и принимая во внимание тот факт, что Земля ежегодно выделяет $8 \cdot 10^{20} \text{ дж}$ тепла.

12. 3. а) В ряде случаев электростатический потенциал φ можно представить в виде $\varphi = f(r) \cos \theta = f(r) z/r$, где $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Например, потенциал такого вида в гл. 12 «Лекций» (вып. 5) возникает при решении задачи об обтекании шара «сухой» водой. Если функцию $f(r)$ разложить в ряд

$$f(r) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n r^n,$$

то для потенциала φ , удовлетворяющего уравнению Лапласа, только два коэффициента b_n будут отличны от нуля. Найдите эти коэффициенты.

- б) В двумерной задаче потенциал φ может быть записан в виде

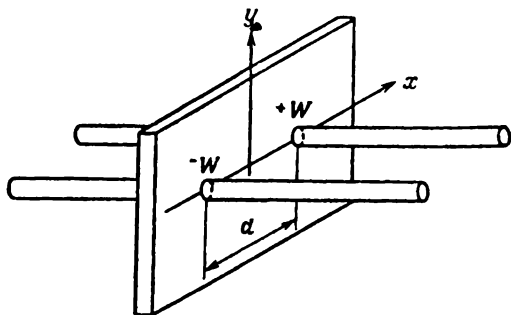
$$\varphi = g(\rho) \cos \theta = g(\rho) \cdot \frac{z}{\rho}, \quad g(\rho) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n,$$

где $\rho^2 = y^2 + z^2$. Найдите отличные от нуля коэффициенты, если потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа.

При решении задачи используйте декартову систему координат.

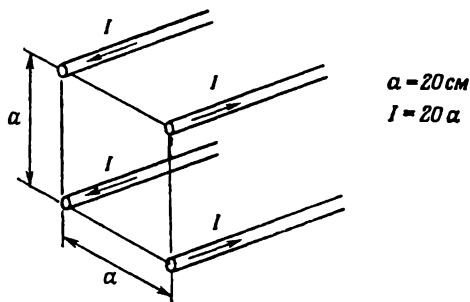
12. 4. Две тонкие водопроводные трубы, расположенные параллельно на расстоянии d друг от друга, пересекают под прямым углом широкую стенку толщиной t . Теплопроводность стенки равна κ , а температура на далеких расстояниях

от труб равна T_0 . По трубе, пересекающей стенку в точке $x = +d/2$, течет горячая вода, сообщаящая стенке $+W$ Вт тепла. По другой трубе течет холодная вода, которая, наоборот, забирает от стенки $-W$ Вт тепла. Считая трубы бесконечно длинными, а задачу двумерной, найдите температуру в точке P с координатами $x = 100d$, $y = 100d$. Пусть $T_0 = 20^\circ\text{C}$, $d = 50$ см, $\kappa = 0,03$ Вт/см·град, $W = 200$ Вт и толщина стенки равна 10 см. Решите задачу в разумных приближениях.



К главе 13. Магнитостатика

13. 1. Концы четырех параллельных медных проводов сечением 1 мм^2 достаточно большой длины образуют квадрат со стороной 20 см (см. рисунок). По каждому проводу течет ток 20 а в направлении, указанном стрелками. Какова величина и направление вектора магнитного поля $\mathbf{B}$ в центре квадрата? Куда направлена сила, действующая на 1 погонный метр левого нижнего из проводов, и какова ее величина?

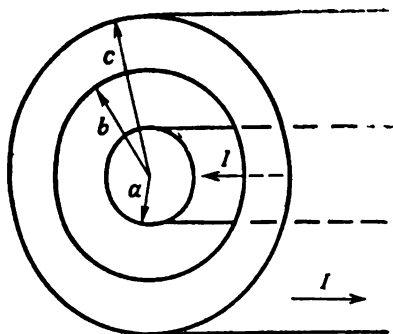


13. 2. Длинный диэлектрический цилиндр радиусом a статически поляризован, причем вектор поляризации во всех точ-

ках цилиндра направлен радиально, а величина его пропорциональна расстоянию от оси, т. е. $\mathbf{P} = P_0 r/2$. Цилиндр вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей оси. Найдите магнитное поле в точках на оси цилиндра, достаточно удаленных от его концов.

13. 3. Длинный коаксиальный кабель состоит из двух концентрических проводников, размеры которых указаны на рисунке. Предполагается, что плотность токов в проводниках однородна по сечению.

- Найдите магнитное поле $\mathbf{B}$ в точках r внутри центрального проводника ($r < a$).
- Найдите $\mathbf{B}$ в пространстве между проводниками ($a < r < b$).
- Найдите $\mathbf{B}$ внутри внешнего проводника ($b < r < c$).
- Найдите $\mathbf{B}$ вне кабеля ($r > c$).

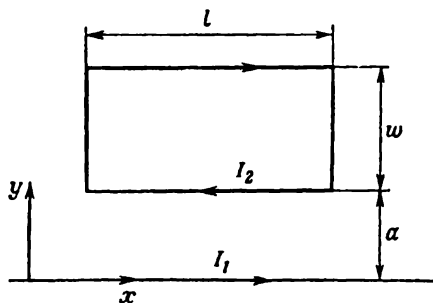


13. 4. Развертка электронного луча в телевизионной электронно-лучевой трубке осуществляется магнитным полем, создаваемым системой отклоняющих катушек, расположенных в узкой части электронно-лучевой трубки. Источником электронов, как правило, служит электронная пушка, из которой электроны вылетают с энергией 3 кэВ. После отклонения электроны ускоряются электрическим полем. Оцените напряженность магнитного поля, соответствующую максимальному отклонению электронного луча. Оцените в тот же момент времени число ампер-витков в отклоняющей катушке. При оценке можно пренебречь ускорением электронов после отклонения. В какую сторону изменятся ваши оценки, если учесть это ускорение?

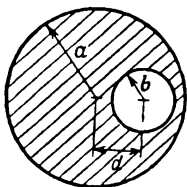
13. 5. По длинному прямолинейному проводу течет ток I_1 , а по контуру, имеющему форму прямоугольника со сторонами l и w , течет ток I_2 . Прямолинейный проводник и контур лежат в одной плоскости.

- Чему равна сила, действующая на контур? Какая сила действует при этом на линейный проводник?

- б) Какой вращающий момент приложен к контуру? Чему равен вращающий момент, приложенный к линейному проводнику?



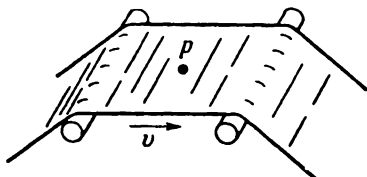
13. 6. Внутри очень длинного проводящего стержня радиусом a имеется цилиндрическая полость радиусом b , ось которой параллельна оси стержня, но находится от нее на расстоянии d . По проводнику течет ток, плотность которого по сечению однородна и равна $+j$. Чему равно магнитное поле на оси полости, вдали от конца стержня?



К главе 14. Магнитное поле в разных случаях

14. 1. При производстве пластмассовой пленки широкая тонкая полоса пластмассы протягивается со скоростью v через два последовательно расположенных ролика. В процессе обработки поверхность пленки приобретает равномерно распределенный электрический заряд σ .

а) Найдите векторный потенциал вблизи поверхности полосы в центре пролета между роликами (вблизи точки P на рисунке).



б) Чему равно поле B в этой же области?

14. 2. По тонкому проводу течет ток I . Чему равно магнитное поле в центре полуокружности, созданное:

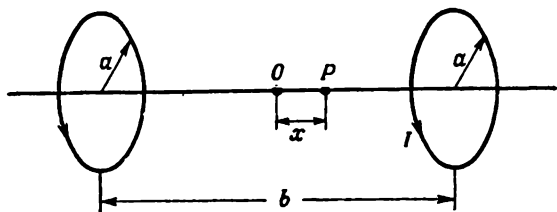
- а) каждым из прямолинейных участков провода, длина которых равна l ?
- б) криволинейным участком провода длиной πr ?
- в) всем проводом?



14. 3. В используемых на практике устройствах часто необходимо добиться высокой однородности магнитного поля. Одной из важнейших характеристик этих устройств является однородность поля, создаваемого кольцами Гельмгольца: двумя коаксиальными витками проволоки, по которым течет ток в одном направлении. Пусть радиус витков равен a , сила тока в них I , а расстояние между ними равно b .

- а) Найдите магнитное поле на оси витков в точке P , расположенной на расстоянии x от средней точки между витками.
- б) Разложите полученное выражение в ряд по степеням x с точностью до членов x^2 .
- в) Каково соотношение между величинами a и b , при котором слагаемые с x^2 обращаются в нуль?
- г) Покажите, что созданное витками магнитное поле в указанном в пункте (б) приближении и при условии, найденном в пункте (в), определяется выражением

$$B_x = \frac{8I}{5^{3/2} a e_0 c^2}.$$



14. 4. По квадратной проволочной рамке со сторонами, равными a , течет ток I .

- а) Используя закон Био — Савара, покажите, что магнитное поле B на оси рамки в точке, расположенной на расстоянии x от ее центра, равно

$$B = \frac{4a^2 I}{\pi (4x^2 + a^2) (4x^2 + 2a^2)^{1/2} e_0 c^2}.$$

- б) Получите тот же результат, определив векторный потенциал.

Примечание. Исходите из интегрального представления векторного потенциала и используйте соотношения

$$\frac{\partial}{\partial x} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) dy,$$

$$\lim_{x \rightarrow c} \int_a^b f(x, y) dy = \int_a^b \{ \lim_{x \rightarrow c} f(x, y) \} dy.$$

14. 5. Определив векторный потенциал, вычислите магнитное поле на оси бесконечно тонкого кольца радиусом a , по которому течет ток I .
14. 6. Проводящая сфера радиусом a заряжена до потенциала V . Сфера вращается вокруг одной из осей, проходящих через ее центр, с угловой скоростью ω . Покажите, что магнитное поле сферы совпадает с полем магнитного диполя, магнитный момент которого равен

$$\mu = e_0 \omega V \left(\frac{4}{3} \pi a^3 \right).$$

Покажите также, что поле внутри сферы равно

$$B_{\text{вн}} = \frac{2\omega V}{3c^2}.$$

Эти выражения точные для всех точек соответственно вне и внутри сферы. Если вы не можете доказать этого, получите ответ на первый вопрос для расстояний, намного превышающих a , а второй результат — для центра сферы.

14. 7. Как отмечалось в «Лекциях», скорость вращения Земли в принципе можно определить, измерив разность потенциалов между центром и поверхностью заряженного цилиндра, помещенного на Северном полюсе Земли так, что его ось проходит через центр земного шара.

а) Покажите, что эту разность потенциалов можно представить в виде

$$V = \left(\frac{v}{c} \right)^2 \frac{\lambda}{4\pi e_0},$$

где v — линейная скорость точек на поверхности цилиндра, а λ — поверхностный заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра.

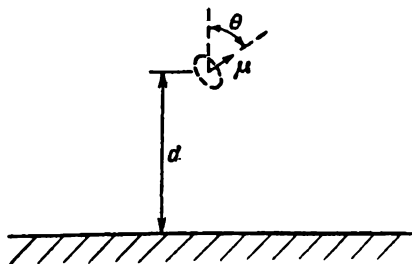
- б) Можно ли представить себе установку с разумными параметрами для измерения этого эффекта?

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

К главе 15. Векторный потенциал

15. 1. Внутри сверхпроводника поля $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ равны нулю.

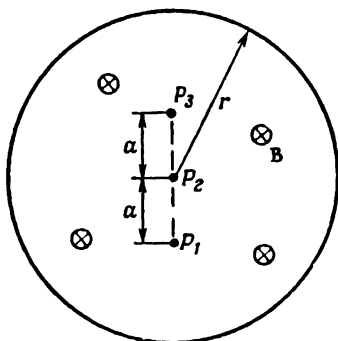
- а) Граничным условием для поля $\mathbf{E}$ на поверхности сверхпроводника является равенство нулю его тангенциальных компонент. Как выглядят граничные условия для магнитного поля?
- б) Маленькая рамка с током помещена на расстоянии d от поверхности сверхпроводника, занимающего полупространство. Магнитный момент μ рамки образует угол θ с нормалью к поверхности. Несколькими словами опишите метод, с помощью которого можно найти магнитное поле в любой точке пространства, предполагая, что поле магнитного диполя уже известно.
- в) Найдите зависимость от угла θ вращающего момента, приложенного к диполю. Найдите углы, соответствующие равновесию диполя. Какие из них отвечают устойчивому равновесию, а какие — неустойчивому?
- г) Найдите зависимость от угла θ силы, притягивающей магнитный диполь к сверхпроводнику или отталкивающей диполь от него.



К главе 17. Законы индукции

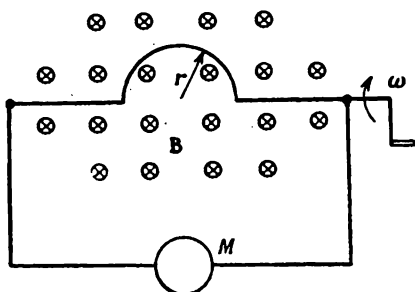
17. 1. На приведенном рисунке показано (крестиками) однородное магнитное поле $\mathbf{B}$ внутри цилиндра радиусом r . Напряженность магнитного поля $\mathbf{B}$ уменьшается

с постоянной скоростью 100 гс/сек . Чему равно мгновенное ускорение (величина и направление) электрона, помещенного в точки P_1 , P_2 и P_3 ? Величину a считать равной $5,0 \text{ см}$.



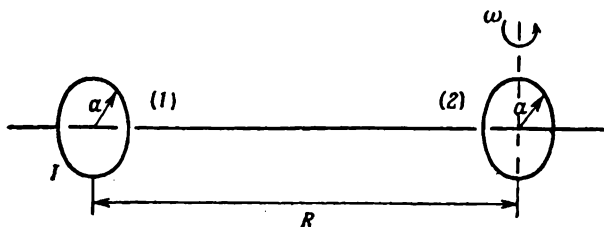
Чему равна частота и амплитуда напряжения и тока, наведенного в проводнике, если внутреннее сопротивление вольтметра M равно R_m , а сопротивление остальных частей цепи ничтожно мало? Предположите, что

17. 2. Жесткий провод, согнутый в полуокружность радиусом r , вращается с угловой скоростью ω в однородном магнитном поле. Чему равна частота и амплитуда напряжения и тока, наведенного в проводнике, если внутреннее сопротивление вольтметра M равно R_m , а сопротивление остальных частей цепи ничтожно мало? Предположите, что



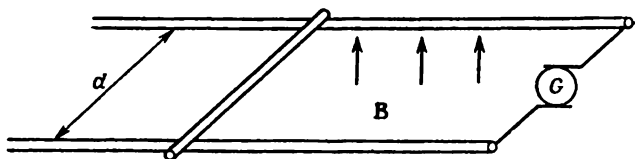
поле, создаваемое током, мало по сравнению с полем B , т. е. наведенный ток мал и не способен существенно изменить величину B .

17. 3. По круговому витку (1) провода, радиус a которого мал, течет постоянный ток I . Другой точно такой же виток провода (2) помещен на оси, проходящей через центр первого витка, на расстоянии R , причем $R \gg a$. Плоскости витков параллельны. Затем виток (2) приводится во вращение с угловой скоростью ω вокруг одного из его диаметров. Какова наведенная в цепи витка (2) э. д. с., если он разомкнут?



17. 4. Металлический провод массой m скользит без трения по двум параллельным металлическим рельсам, находящимся на расстоянии d друг от друга, как показано на рисунке. При движении провод пересекает силовые линии однородного магнитного поля $\mathbf{B}$, направленного вертикально.

- а) Генератор G создает постоянный ток I , текущий от одного рельса к другому через скользящий провод. Определите скорость (величину и направление) провода как функцию времени, предполагая, что в момент $t = 0$ провод покоился.
- б) Генератор заменяется электрической батареей с постоянной э. д. с. Провод при этом движется с постоянной скоростью. Найдите скорость установившегося движения. Достигает ли скорость такой величины в условиях задачи (а)?



- в) Чему равен ток в задаче (б) в условиях установившегося движения? Считайте, что магнитное поле, создаваемое током I , значительно меньше $\mathbf{B}$.

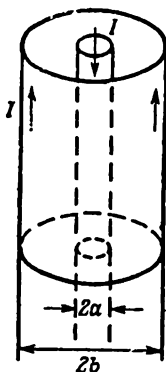
17. 5. Цепь состоит из двух соединенных последовательно катушек с индуктивностями L_1 и L_2 . Взаимная индуктивность катушек равна $\mathcal{M}$. Найдите полную индуктивность цепи. Как изменится суммарная индуктивность, если витки одной катушки перемотать в другую сторону?

17. 6. Кабель сделан из провода и охватывающего его коаксиального проводящего цилиндра, по которым текут токи в противоположных направлениях. Радиус внутреннего провода кабеля равен a , а внешний радиус цилиндра равен b .

- а) Покажите, что если предположить, что ток во внутреннем проводе течет только по его поверхности, то индуктивность, приходящаяся на единицу длины кабеля, равна

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

- б) Вычислите индуктивность, если ток равномерно распределен по сечению внутреннего провода кабеля. Сравните оба полученных результата. Сильно ли зависит результат от характера распределения тока по сечению центрального провода?



17. 7. Тороидальная катушка из N витков, внутренний радиус которой равен b , в поперечном сечении имеет форму квадрата со сторонами, равными a .

а) Покажите, что индуктивность катушки равна

$$\mathcal{L} = \frac{N^2 a}{2\pi e_0 c^2} \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

б) Выразите через те же величины взаимную индуктивность системы, состоящей из тороидальной катушки и длинного прямолинейного провода, вытянутого вдоль оси симметрии катушки. Считайте, что проводники, замыкающие цепь, настолько удалены от катушки, что их влиянием можно пренебречь.

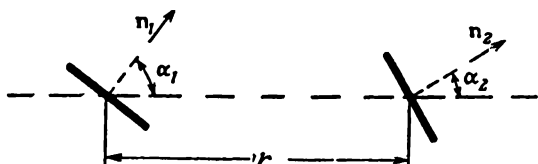
в) Найдите отношение индуктивности катушки к взаимной индуктивности системы.

17. 8. Два плоских витка провода с одинаковой площадью A и током I помещены на расстоянии r друг от друга так, как показано на рисунке. Единичные векторы $\mathbf{n}_1$ и $\mathbf{n}_2$, определяющие направления нормалей к виткам, образуют с линией, соединяющей центры витков, углы α_1 и α_2 и лежат с ней в одной плоскости.

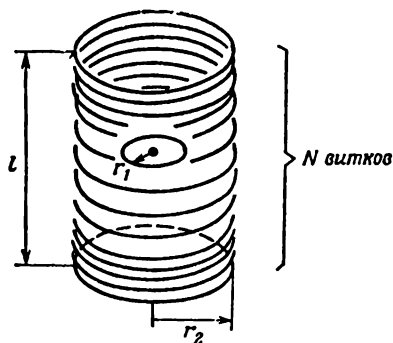
а) Предполагая, что радиус каждого витка во много раз меньше r , найдите взаимную индуктивность $\mathcal{M}_{12}$ двух витков.

б) Используя найденное выражение для $\mathcal{M}_{12}$, найдите величину и направление силы, действующей между витками.

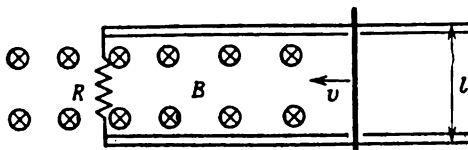
- в) Как изменится эта сила, если направление тока в одном из витков или сразу в обоих поменять на противоположное?



17. 9. Круговой виток провода радиусом r_1 расположен в центре соленоида длиной l , состоящего из N витков радиусом r_2 , причем $r_2 \gg r_1$. Оси витка и соленоида совпадают. Обозначив цепь кругового витка индексом 1, а цепь соленоида индексом 2, найдите индуктивности $\mathcal{M}_{12}$ и $\mathcal{M}_{21}$.



- 17.10. В однородном магнитном поле $\mathbf{B}$, направленном перпендикулярно плоскости рисунка, по двум проводящим рельсам со скоростью v движется провод. Какой ток течет через сопротивление R , если $v = 100 \text{ см/сек}$, $l = 10 \text{ см}$, $B = 0,1 \text{ вебер/м}^2$ и $R = 10 \text{ ом}$ (магнитным полем, создаваемым током, пренебречь). В какую сторону изменится найденный вами ток, если не пренебрегать полем, создаваемым движущимся проводником? Изменится ли ваш ответ, если магнит, создающий поле $\mathbf{B}$, будет двигаться со скоростью v в ту же сторону, что и провод? Как меняется со временем коэффициент самоиндукции изображенной на рисунке цепи?



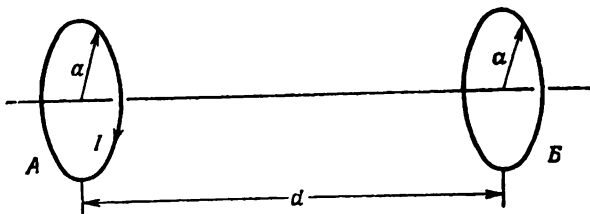
17.11. Рассмотрим два витка провода радиусом a , находящиеся на расстоянии d друг от друга ($d \gg a$). Центры витков лежат на одной прямой, перпендикулярной плоскости обоих витков. Через виток A в направлении, показанном на рисунке стрелкой, пропускается ток $I = K_0 t^2$ (t — время). Сопротивление витка B равно R .

- Если пренебречь самоиндукцией витков, то чему равен момент сил, действующих на виток B ?
- Покажите, что если пренебречь самоиндукцией, то сила, действующая на виток B , равна

$$\frac{24\pi^4 a^8 K_0^2 t^3}{(4\pi e_0 c^2)^2 d^3 R}.$$

В какую сторону направлена эта сила?

- Покажите качественно, уменьшается или увеличивается найденная вами величина силы и величина момента силы, если самоиндукцией витков не пренебрегать?
- Выясните, как изменится ответ к пунктам (а) и (б) задачи, если виток B повернуть на 90° вокруг оси, перпендикулярной общей оси витков.



К главе 20. Решения уравнений Максвелла в пустом пространстве

20.1. Решение дифференциальных уравнений иногда удобно искать в комплексном виде.

- Покажите, что если электрическое поле зависит от времени t и координаты x (зависимости от y и z нет) в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kx)},$$

то каждая компонента вектора напряженности электрического поля удовлетворяет волновому уравнению. (Напомним, что физическое поле описывается вещественной частью приведенного выражения.)

- Убедитесь, что вещественная часть $\mathbf{E}$ описывает плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x . В какую сторону оси x распространяется волна?

- в) Покажите, что если оператор ∇ действует на функции, подобные приведенной в пункте (а), то он имеет вид

$$\nabla = \mathbf{e}_x \frac{\partial}{\partial x} = \mathbf{e}_x (-ik),$$

где $\mathbf{e}_x$ — единичный вектор, направленный вдоль оси x ; $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица, т. е. что его действие сводится к простому умножению функции на число. Можно ли подобное утверждать относительно оператора производной по времени?

- г) Используя результат пункта (в), покажите, какой вид имеют уравнения Максвелла для полей, зависящих от t и x синусоидально. Какая связь должна существовать между ω и k ?
- д) Как изменятся ваши ответы, если электрическое поле имеет вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm i(\omega t + kx)}$$

20. 2. Плоская электромагнитная волна частоты ω отражается от зеркала, движущегося со скоростью v в направлении распространения волны. Используя уравнения Максвелла, найдите частоту отраженной волны, которая регистрируется неподвижным наблюдателем. Сравните ваш результат с тем, который был получен в вып. 3 с помощью теории относительности.

К главе 21. Решения уравнений Максвелла с токами и зарядами

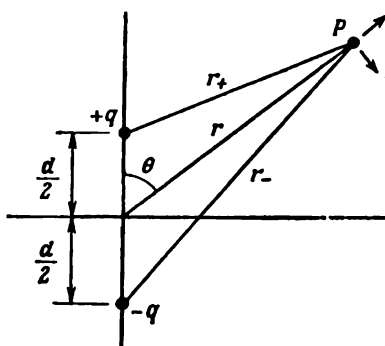
21. 1. Выведите подробно выражение (21.26) (см. «Лекции», вып. 6, стр. 144).
21. 2. С помощью уравнения (21.1) (см. вып. 6, стр. 157) можно найти электрическое поле, создаваемое движущимся зарядом. Рассмотрим диполь, образованный положительным и отрицательным зарядами, осциллирующими относительно начала координат вдоль оси z так, что координата положительного заряда меняется со временем по закону $z_+ = (d/2) \cos \omega t$, а отрицательного $z_- = -(d/2) \cos \omega t$. Дипольный момент такой системы зарядов $\mathbf{p} = \mathbf{e}_z qd \cos \omega t$. Покажите, что электрическое поле диполя, найденное из упомянутого уравнения, имеет вид ($\rho = qd$)

$$E_\varphi = 0,$$

$$E_\theta = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \sin \theta \left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$E_r = \frac{2\rho}{4\pi\epsilon_0} \cos \theta \left[\frac{1}{r^3} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

При решении задачи считайте, что точка P находится на расстоянии $r \gg d$ от диполя.



Примечание. $e_{r+} \approx e_r \approx e_{r-}$, а de_{r+}/dt и d^2e_{r+}/dt^2 — это векторы, направления которых практически совпадают с направлением вектора e_θ .

21. 3. Используя симметрию уравнений Максвелла и вид электрического и магнитного полей осциллирующего электрического диполя, найдите поле осциллирующего магнитного диполя*. Это поле должно совпадать с полем диполя, создаваемого контуром с током $i = i_0 \cos \omega t$, радиус которого равен a ($a \ll c/\omega$).

21. 4. В задаче 21.2 диполь состоял из двух зарядов, осциллирующих вокруг начала координат. Диполь, величина которого изменяется со временем по гармоническому закону, можно построить иным способом: взять два проводящих шара, соединить их проводником длиной d и по проводнику пропустить переменный ток. Тогда на концах проводника возникает переменный заряд $\pm q(t)$, а сам проводник остается в целом нейтральным; заряд $q(t)$ можно рассматривать как вещественную часть выражения $Q_0 e^{i\omega t}$.

В произвольной точке P на расстоянии $r \gg d$ от диполя интегральное представление для запаздывающего потенциала приводит к точному выражению для φ (см. рисунок)

$$\varphi = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{\cos \omega(t - r_1/c)}{r_1} - \frac{\cos \omega(t - r_2/c)}{r_2} \right].$$

а) Предполагая $\omega d/2c \ll 1$, покажите, что

$$\varphi = \frac{Q_0 d \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{1}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{c} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

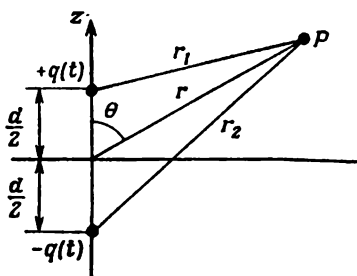
* Электрическое поле диполя найдено в задаче 21.2. Магнитное поле диполя определяется из уравнения (21.1) «Лекций» (вып. 6):

$$c\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}.$$

б) Покажите далее, что

$$A_z \approx - \frac{Q_0 \omega d \sin \omega (t - r/c)}{4\pi \epsilon_0 c^2 r}.$$

в) Убедитесь, что из найденных вами потенциалов следуют те же выражения для электрического и магнитного полей.



21. 5. Антенна, предназначенная для работы на частоте $\omega = 2\pi c/\lambda$, изготовлена из двух коллинеарных проводов, длина каждого из которых равна $1/4$ длины волны. На антенну подается синусоидально меняющееся напряжение требуемой частоты. Возникающее в антенне распределение токов с большой степенью точности описывается выражением

$$i = -i_0 \sin(\omega t) \cos\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right).$$

Для определения поля излучения антенну можно представить в виде суперпозиции большого числа диполей длиной Δz , причем каждый из них расположен в точке z . Величина дипольного момента меняется от диполя к диполю.

а) Покажите, что дипольный момент каждого такого диполя следует брать в виде

$$\Delta p = \left\{ \frac{i_0}{\omega} \cos \frac{2\pi z}{\lambda} \cos \omega t \right\} \Delta z.$$

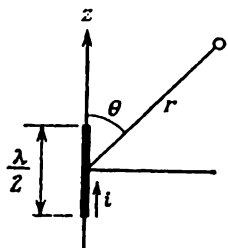
б) Покажите, что на больших расстояниях ($r \gg c/\omega$) электрическое и магнитное поля антенны имеют вид

$$E_\theta = \frac{2i_0}{4\pi \epsilon_0 c r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c}\right),$$

$$B_\phi = \frac{1}{c} E_\theta.$$

в) Нарисуйте примерный вид кривой зависимости E_θ от угла θ . На этом же рисунке нанесите кривую зависимости

E_θ от θ для одного диполя и сравните полученные кривые.



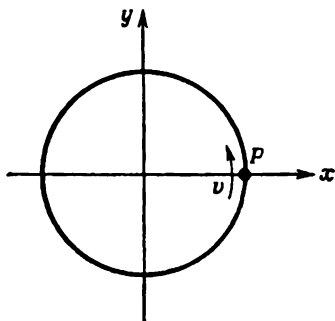
$$i = -i_0(\sin \omega t) \cos \frac{2\pi z}{\lambda},$$

$$\left(-\frac{\lambda}{4} < z < \frac{\lambda}{4}\right).$$

21. 6. Частица, имеющая заряд q , движется по кругу радиусом a со скоростью v .

- Найдите скалярный потенциал ϕ в центре круга в тот момент, когда частица находится в точке P .
- Определите векторный потенциал A в центре круга в тот же момент.
- Определив потенциалы в окрестности центра круга, воспользуйтесь выражениями (18.16), (18.19) («Лекции», вып. 6, стр. 92, 93) и найдите электрическое и магнитное поля в центре. Как ориентирован вектор напряженности электрического поля по отношению к радиусу-вектору, проведенному в точку P ?
- Вычислите эти поля, воспользовавшись формулой (21.1) (вып. 6, стр. 144).

В этой задаче скорость v не предполагается малой по сравнению со скоростью света c .

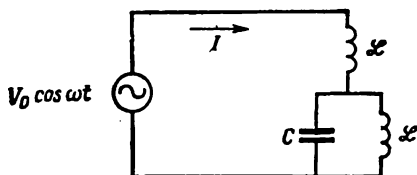


К главе 22. Цепи переменного тока

22. 1. Проволочки соединены так, что они образуют ребра куба, причем сопротивление каждого ребра 1 ом. Найдите сопротивление между различными парами вершин куба.

22. 2. а) Найдите ток I в цепи, схема которой изображена на рисунке.

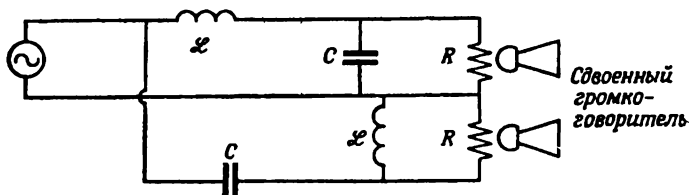
б) Чему равен ток I , если изображенные на схеме катушки индуктивности обладают взаимной индуктивностью M ?



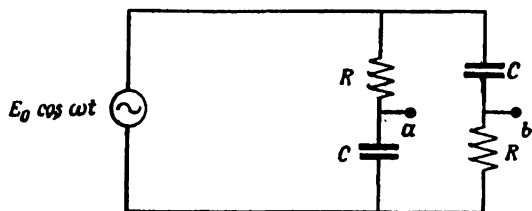
22. 3. Принципиальная схема устройства звуковоспроизведения высокого качества имеет вид, приведенный на рисунке. Эффективное сопротивление каждого громкоговорителя равно R .

а) Покажите, что при $R^2 = \mathcal{L}/2C$ импеданс на входе (на клеммах генератора) веществен и равен R .

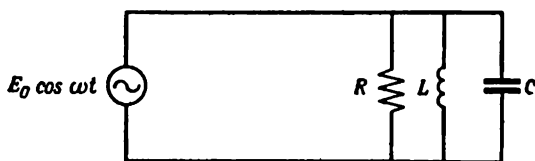
б) Покажите, что если ω_c определить как частоту, при которой на каждый из громкоговорителей приходится $1/2$ общей мощности, то $\omega_c^2 = 1/\mathcal{L}C$.



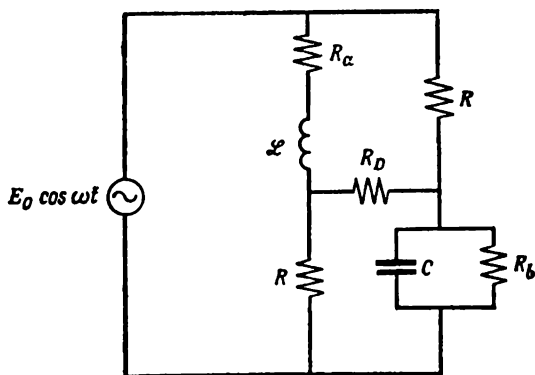
22. 4. Покажите, что амплитуда разности потенциалов (напряжения) между точками a и b цепи, изображенной на схеме, не зависит от ω . Опишите качественно зависимость фазы этой разности потенциалов от частоты ω . Как изменится величина разности потенциалов между точками a и b , а также ее фаза, если источник напряжения обладает внутренним сопротивлением $R/10$?



22. 5. Электрическая цепь имеет вид, изображенный на схеме.
- Изобразите схематически зависимость амплитуды тока в цепи от частоты для произвольно выбранных величин L , C и R .
 - Если $R \gg \sqrt{L/C}$, сравните частоту резонанса и ширину пика резонансной кривой данной цепи с аналогичными величинами для цепи с последовательным соединением ее элементов, но при $R \ll \sqrt{L/C}$. Специально рассмотрите случай $R = K \sqrt{L/C}$ для цепи с параллельным соединением и случай $R = (1/K) \sqrt{L/C}$ для цепи с последовательным соединением.



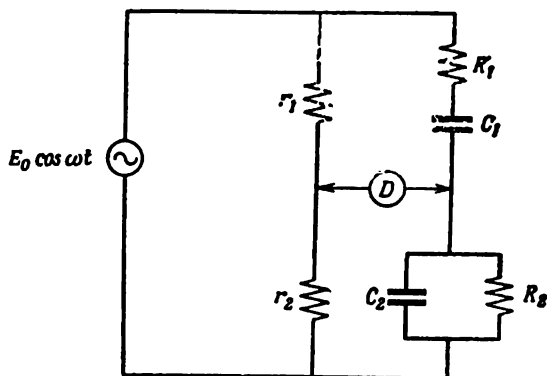
22. 6. Мостовая схема, изображенная на рисунке, используется для измерений индуктивности. Источником переменной э. д. с. частоты ω служит генератор напряжения. Если мост сбалансирован, ток через сопротивление R_D равен нулю. Найдите $\mathcal{L}$ как функцию R и C .



22. 7. Изображенная схема представляет собой мост Вина, часто используемый в избирательных RC -системах. Если ток через индикатор D равен нулю, говорят, что мост сбалансирован. Покажите, что баланс наступает при одно-

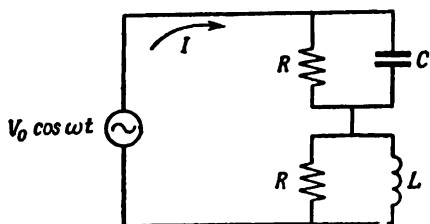
временном выполнении следующих двух условий:

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right) = \left(\frac{R_1}{R_2}\right) + \left(\frac{C_2}{C_1}\right), \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}.$$



22. 8. В цепи, изображенной на рисунке, действует источник переменного напряжения $V(t) = V_0 \cos \omega t$.

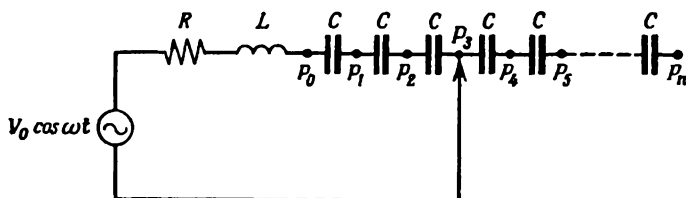
- Покажите, что если R , L и C подобраны так, что $RC = L/R$, ток I в цепи не зависит от частоты.
- Какова разность фаз между приложенным напряжением и напряжением на концах RC -пары (при $RC = L/R$)?



22. 9. Электрическая цепь собрана так, что один из ее проводов, показанный на рисунке стрелкой и подключенный к точке P_3 , может быть присоединен к любой из точек $P_0, P_1, \dots, P_n$.

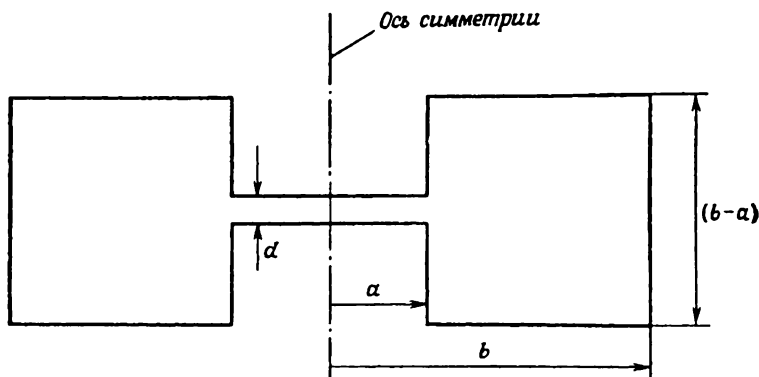
- Найдите выражение для мощности, выделяемой в сопротивлении R , если цепь замкнута в точке P_m , где $0 \leq m \leq n$.
- Допустим, что $R = 1000$ ом, $L = 10$ генри, $C = 20$ мкф, $\omega = 100$ рад/сек.
 - При каком значении m эта мощность максимальна?
 - Каково максимальное значение напряжения между

точками P_0 и P_2 при $m = 2$ и $V_0 = 100$ в? На концах сопротивления R ?



К главе 23. Полые резонаторы

23. 1. Найдите приближенно «резонансную» частоту для полости, показанной на рисунке, предполагая, что $d \ll a$ и $d \ll (b - a)$. Какими основными эффектами вы пренебрегли? Если полость равномерно остывает (т. е. температура во всех точках полости в один и тот же момент времени одинакова), приведет ли ее тепловое сжатие к увеличению или уменьшению резонансной частоты? А может быть, она останется неизменной?



К главе 24. Волноводы

24. 1. Единица длины линии передачи обладает индуктивностью L_0 и емкостью C_0 . Покажите, что если напряжение V и ток I в линии передачи меняются медленно (что соответствует передаче сигналов с длиной волны, много большей, чем расстояние между секциями линии передачи),

то V и I удовлетворяют следующим уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial x} &= -L_0 \frac{\partial I}{\partial t}, \\ \frac{\partial I}{\partial x} &= -C_0 \frac{\partial V}{\partial t},\end{aligned}$$

т. е. I и V удовлетворяют волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2},$$

где

$$v^2 = \frac{1}{L_0 C_0}.$$

Заметьте, что предположение о медленном изменении сигналов отнюдь не обязательно, но обоснование этого утверждения выходит за рамки гл. 24.

24. 2. Характеристический импеданс равен $Z_0 = \sqrt{L_0/C_0}$, где L_0 — индуктивность, а C_0 — емкость единицы длины. Покажите, что для линии передачи, состоящей из двух тонких полос шириной b , находящихся на расстоянии a друг от друга ($a \ll b$), характеристический импеданс равен

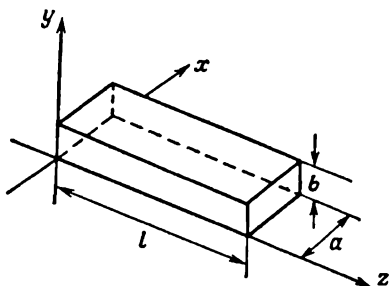
$$Z_0 \approx \frac{1}{\epsilon_0 c} \frac{a}{b}.$$

24. 3. Секция цилиндрической коаксиальной линии передачи закрыта с обоих концов проводящими пластинами. Длина полости, образованной таким способом, равна l . Для самой низкой моды, электрическое поле которой радиально:
- найдите частоту;
 - найдите выражение для E ;
 - сравните найденную частоту с $\omega_0 = 1/\sqrt{\mathcal{L}C}$, где $\mathcal{L}$ — индуктивность, а C — емкость, приходящиеся на длину l бесконечной коаксиальной линии.
24. 4. Волновод в форме прямоугольного параллелепипеда (стороны сечения a и b) изготовлен из идеального проводящего материала. Концы одной секции волновода, длина которой l , закрыты пластинами из проводящего материала, так что полость внутри волновода фактически представляет собой резонатор. Если электрическое поле

в полости определяется вещественной частью выражения

$$E(x, y, z, t) = E_0(x, z) e_y e^{i\omega t},$$

то чему равна амплитуда $E_0(x, z)$ для колебания самой низкой резонансной частоты? Чему равна сама резонансная частота?



24. 5. Коаксиальный кабель состоит из двух концентрических проводящих цилиндров. Один конец ($x = 0$) кабеля подсоединен к генератору переменного напряжения $V(t) = V_0 \cos \omega t$. Другой конец ($x = l$) закрыт проводящей пластиной. Индуктивность и емкость единицы длины кабеля равны L_0 и C_0 . Поле в таком кабеле можно представить в виде суперпозиции двух волн: падающей и отраженной от закороченного конца. Амплитуды и фазы этих волн должны быть подобраны так, чтобы суммарное напряжение между проводниками было равно нулю при $x = l$ и $V_0 \cos \omega t$ при $x = 0$.

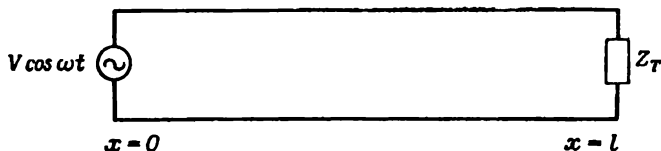
- а) Напишите выражения для падающей и отраженной волн.
- б) Нарисуйте кривую зависимости напряжения между проводниками от расстояния x , если длина кабеля l равна $5\pi c/2\omega$ (c — скорость света). Укажите значения x , для которых напряжение максимально.
- в) Чему равен ток в точках $x = 0$, $x = l/2 = 1/2 (5\pi c/2\omega)$ и $x = l = 5\pi c/2\omega$?
- г) Предполагая источник напряжения идеальным, определите *средний* момент сил, который должен быть приложен к его ротору, чтобы последний вращался с угловой скоростью ω .

24. 6. Покажите, что если при $x = l$ линия передачи замкнута (включен элемент с импедансом Z_T), то импеданс на «входе» линии ($x = 0$) равен

$$Z_s = iZ_0 \frac{\operatorname{tg}(\omega \sqrt{LC} l) - iZ_T/Z_0}{1 + iZ_T/Z_0 \operatorname{tg}(\omega \sqrt{LC} l)},$$

где $Z_0 = \sqrt{L/C}$ — характеристический импеданс линии. Чему равно Z_s , если

- а) $Z_T = 0$?
- б) $Z_T = \infty$?
- в) $Z_T = Z_0$?



24. 7. Линия передачи с характеристическим импедансом Z_1 соединена с другой линией с характеристическим импедансом Z_2 .

Покажите, что если система работает от генератора, подключенного к первой линии (Z_1), «коэффициент отражения», определяемый отношением $V_{\text{отр}}/V_{\text{пад}}$, равен

$$\frac{V_{\text{отр}}}{V_{\text{пад}}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2},$$

а «коэффициент пропускания»

$$\frac{V_{\text{пр}}}{V_{\text{пад}}} = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2}.$$

24. 8. Электрические поля внутри волноводов, описанных в гл. 24 «Лекций», обладают тем свойством, что проекция вектора напряженности электрического поля на направление распространения волны равна нулю, т. е. электрическое поле поперечное. Кроме того, могут существовать бегущие волны, у которых равна нулю проекция напряженности магнитного поля на направление распространения (так называемые поперечные магнитные волны). Для волновода в форме прямоугольного параллелепипеда (см. «Лекции», вып. 6, стр. 227, фиг. 24.3 и 24.4) векторный потенциал поперечной магнитной волны имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{e}_z \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} e^{i(\omega t - k_z z)},$$

где

$$k_z = \sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

- а) Убедитесь, что магнитное поле, найденное с помощью этого потенциала, действительно поперечно, и покажите,

что электрическое поле $\mathbf{E}$ и магнитное поле $\mathbf{B}$ удовлетворяют волновому уравнению и соответствующим граничным условиям.

Примечание. Мы полагаем, что $\mathbf{E} = -\nabla\varphi - \partial\mathbf{A}/\partial t$, $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, где $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c^2)(d\varphi/dt)$.

- б) Покажите, что поперечная магнитная волна не распространяется, если

$$\omega < c \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}.$$

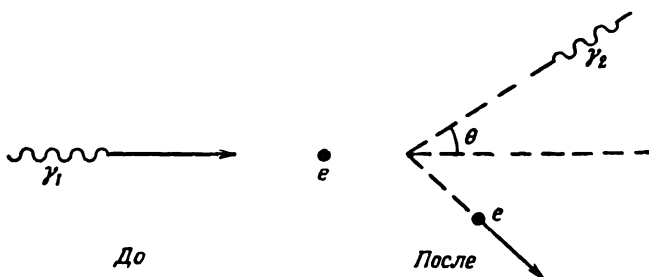
К главе 25. Электродинамика в релятивистских обозначениях

(Единицы измерения выбраны так, что $c = 1$.)

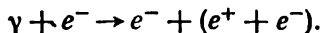
25. 1. Запишите в 4-векторной форме выражения

$$(\varphi^2 - \mathbf{A}^2), \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{j} - \rho\varphi).$$

25. 2. Комптон-эффект состоит в том, что фотон, налетая на покоящийся электрон, рассеивается на нем, как частица на частице. Выразите энергию рассеянного фотона через энергию падающего фотона и угол отклонения его направления распространения от первоначального.



25. 3. Позитрон может быть создан в результате бомбардировки покоящегося электрона фотоном:



Какова минимальная энергия фотона, необходимая для осуществления этого процесса? При решении задачи пользуйтесь, где это возможно, 4-векторами и их инвариантными комбинациями.

25. 4. На покоящуюся частицу массы m налетает другая частица с массой M и импульсом p . В результате полностью неупругого соударения частицы сливаются, образуя новую

частицу. Какова масса и скорость этой частицы? Сравните ваш результат с тем, который получается в нерелятивистском приближении.

К главе 26. Лоренцевы преобразования полей

(Единицы измерения выбраны так, что $c = 1$.)

26. 1. Распишите подробно и вычислите выражение

$$\nabla_\mu F_{\mu\nu}.$$

26. 2. Найдите 4-вектор, пространственные компоненты которого совпадают с компонентами вектора

$$\rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B}.$$

Каков физический смысл временной и пространственных компонент этого 4-вектора?

26. 3. Покажите, что $E^2 - B^2$ и $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ инвариантны относительно преобразований Лоренца. Убедитесь, что если векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ образуют острый угол в какой-нибудь системе координат, то этот угол будет острым во всех других системах координат. Для какого важного физического явления оба инварианта равны нулю?

26. 4. Пусть $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ — напряженности электрического и магнитного полей в некоторой точке пространства в данной системе координат. Определите скорость другой системы координат, в которой электрическое и магнитное поля параллельны. Систем координат, обладающих таким свойством, много. Действительно, если найдется хотя бы одна такая система координат, то указанные векторы будут параллельны и во всех других системах координат, движущихся с постоянной скоростью относительно найденной в направлении, общем для векторов $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{B}'$. Поэтому удобно и в то же время достаточно рассмотреть систему координат, вектор скорости которой перпендикулярен к векторам $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$.

26. 5. В гл. 26 «Лекций» (вып. 6) 4-мерный потенциал A_μ , создаваемый движущейся с постоянной скоростью заряженной частицей, был найден путем перехода от системы координат, где частица покоится, к лабораторной системе координат. Напряженности $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ электрического и магнитного полей с помощью A_μ определялись согласно общим формулам.

Найдите $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, исходя из известного их вида в системе координат, где заряд покоится, и перейдя к движущейся системе координат.

26. 6. Покажите, что электрическое и магнитное поля заряда, движущегося с постоянной скоростью, могут быть представлены в виде

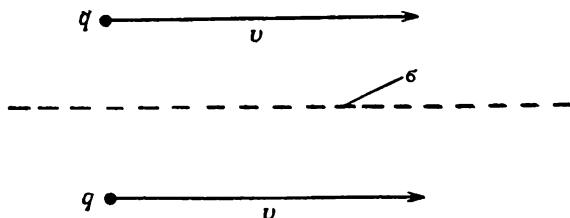
$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \frac{1-v^2}{(1-v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

$$\mathbf{B} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3} \frac{1-v^2}{(1-v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки, где в данный момент находится заряд, в точку наблюдения, а θ — угол между векторами $\mathbf{r}$ и $\mathbf{v}$.

По очень длинному прямому проводу (не обладающему сопротивлением) течет ток I , создаваемый электронами, движущимися со скоростью v . Полная плотность зарядов в каждой точке провода равна нулю благодаря наличию положительно заряженных ионов.

- Найдите поля вне провода в системе координат, где провод покоится.
 - Найдите те же поля в системе координат, движущейся вместе с электронами. В «Лекциях» электрическое поле в такой системе координат было найдено другим методом [см. вып. 5, стр. 274, выражение (13.28)].
26. 8. Два электрона с одинаковыми скоростями v движутся параллельно друг другу по обе стороны от бесконечной положительно заряженной плоскости на расстоянии a от нее; плотность покоящихся поверхностных зарядов равна σ .
- При какой величине σ расстояние между электронами будет оставаться равным $2a$?
 - Сравните величину σ , которая получается для электронов с энергией 500 Мэв, с той, которая будет в случае медленно движущихся электронов.



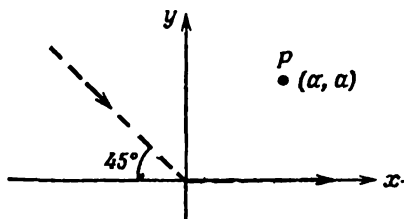
26. 9. Пусть f_μ — 4-вектор силы, действующей на частицу, а u_μ — 4-вектор ее скорости. Покажите, что

$$f_\mu u_\mu = 0.$$

- 26.10. Частица с зарядом q движется с постоянной скоростью в плоскости xu вдоль траектории, изображенной на рисунке штриховой линией (в начале координат частица рассеивается). Величина скорости частицы вдоль всей траектории остается постоянной. В момент времени $t = t_1$ частица находится в точке $x = a, y = 0$.

а) Найдите электрическое поле в точке P ($x = y = a$) при $t = t_1$, если $v/c = 0,5$ (c — скорость света).

б) Как изменился бы ваш ответ, если бы до рассеяния в начале координат частица двигалась вдоль оси y ?



К главе 27. Энергия поля и его импульс

27. 1. Методом, использованным в «Лекциях» (вып. 6, стр. 292) при выводе выражения (27.11), представьте в ином виде выражения

$$\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}).$$

27. 2. Выразите в мегатоннах (Mt) энергию магнитного поля Земли, заключенную во всем пространстве, внешнем по отношению к Земле ($1 Mt$ — энергия, освобождаемая при взрыве 1 млн. тонн тринитротолуола, т. е. $4,2 \cdot 10^{15}$ Дж). Предположите, что магнитное поле Земли — это поле диполя с напряженностью на экваторе примерно около $\frac{2}{3} \text{ гс}$ ($\frac{2}{3} \cdot 10^{-4}$ вебер/м²).

Как вы считаете, может ли водородная бомба в $1 Mt$, взорванная высоко над поверхностью Земли, существенно исказить магнитное поле Земли?

27. 3. Вычислите поток вектора Пойнтинга $\mathbf{S}$ через поверхность длинного прямолинейного провода, сопротивление единицы длины которого равно R . Сравните ваш результат с омическими потерями.

27. 4. Длинный коаксиальный кабель изготовлен из двух идеально проводящих концентрических цилиндров. Один

конец кабеля подсоединен к электрической батарее, напряжение на клеммах которой равно V . К другому концу кабеля присоединено сопротивление R . Следовательно, ток, протекающий по кабелю, равен $I = V/R$. С помощью вектора Пойнтинга вычислите скорость потока энергии.

27. 5. Средняя мощность радиоволн, излучаемых широкоэмитальной станцией, составляет примерно 10 кВт.

а) Чему равна величина вектора Пойнтинга на поверхности Земли в точках, удаленных от станции на 10 км? На таком расстоянии излучаемые волны можно считать плоскими. Разумно предположить, что вся мощность излучается $1/4\lambda$ антенной, помещенной над идеальной проводящей плоскостью.

б) Найдите максимальные значения напряженностей электрического и магнитного полей.

27. 6. Поля, соответствующие наинизшей по частоте поперечной электрической волне в волноводе прямоугольного сечения (см. фиг. 24.6, вып. 6 «Лекций», стр. 230), имеют вид

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_y E_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z),$$

$$\mathbf{B} = -\mathbf{e}_x E_0 \frac{k_z}{\omega} \sin \frac{\pi x}{a} \cos(\omega t - k_z z) - \mathbf{e}_z E_0 \frac{\pi}{\omega a} \cos \frac{\pi x}{a} \sin(\omega t - k_z z).$$

а) Покажите, что приведенное выше решение удовлетворяет граничным условиям задачи.

б) Вычислите вектор Пойнтинга $\mathbf{S}$ и плотность энергии U .

в) Вычислите средний поток энергии через поверхность, перпендикулярную оси z .

г) Вычислите среднюю плотность энергии в волноводе.

д) Используя результаты пунктов (в) и (г), вычислите среднюю скорость распространения энергии. Покажите, что эта скорость совпадает с групповой скоростью [см. формулу (24.27), вып. 6, стр. 232].

27. 7. а) Найдите плотность потока энергии, излучаемой диполем с осциллирующим дипольным моментом $p \cos \omega t$. *Примечание.* Следует принять во внимание только члены, убывающие с расстоянием по закону $1/r$.

б) Путем интегрирования по поверхности сферы большого радиуса, центр которой совпадает с диполем, покажите, что средняя излучаемая мощность равна

$$\frac{1}{3} \frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\omega^4}{c}.$$

27. 8. Плоская электромагнитная волна, падая на свободный электрон, заставляет его осциллировать. Найдите отно-

шение энергии, излучаемой электроном в единицу времени, к плотности потока энергии падающей электромагнитной волны. Частота волны предполагается малой. Поэтому влиянием магнитного поля B волны на движение электрона можно пренебречь.

27. 9. Частица пыли в Солнечной системе испытывает действие двух сил: силы притяжения к Солнцу и планетам и силы светового давления, пропорциональной ее поперечному сечению. Существует такой размер частицы, при котором эти силы уравнивают друг друга. Предполагая, что частица имеет форму шарика и поглощает весь падающий на нее свет, найдите радиус частицы, отвечающий ее равновесию в поле этих двух сил. Объяснение того факта, что «хвосты» комет направлены в сторону от Солнца, покоится на предположении о существовании такого равновесия и о том, что «хвост» кометы состоит из частиц малого размера, возможно даже из молекул газа. Разумно ли такое объяснение? Мощность, излучаемая Солнцем, равна $4 \cdot 10^{26}$ вт, его масса $2 \cdot 10^{30}$ кг.

27.10. На полый тороид, средний радиус которого равен R , а радиус поперечного сечения r ($r \ll R$), намотано N витков проволоки. В момент времени $t = 0$ по проволоке пропускается ток, сила которого нарастает со временем по линейному закону

$$I(t) = Kt.$$

- а) Найдите магнитное поле и энергию, запасенную в тороиде к моменту времени t .
- б) Найдите направление и величину вектора Пойнтинга в любой внутренней точке тороида в момент времени t .
- в) Используя вектор Пойнтинга, найдите скорость изменения со временем энергии электромагнитного поля внутри тороида в произвольный момент времени. Убедитесь в правильности вашего ответа, используя решение к пункту (а) задачи.

К главе 28. Электромагнитная масса

28. 1. Предполагая, что энергия покоя электрона совпадает с его электростатической энергией и что заряд электрона равномерно распределен по объему сферы, вычислите радиус этой сферы. Как изменится результат, если заряд считать равномерно распределенным по поверхности сферы?

28. 2. Хорошо известно, что электроны, кроме заряда и массы, обладают еще и собственным моментом количества движения (спином) и магнитным моментом, которые связаны соотношением

$$\frac{\text{Момент количества движения}}{\text{Магнитный момент}} = \frac{m}{q}.$$

Это соотношение выполняется с точностью до 0,1%. Будем предполагать, что вся масса электрона электромагнитная, т. е. $m_{э.м.} = 2e^2/3ac^2$ [см. вып. 6, стр. 309, формула (28.4)].

- а) В центре однородно заряженной сферической оболочки радиуса a и с полным зарядом q поместите магнитный диполь с магнитным моментом μ и покажите, что момент количества движения электромагнитного поля равен

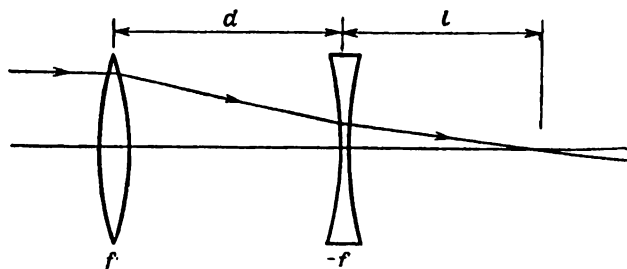
$$L = \frac{2}{3} \frac{q\mu}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{1}{a}.$$

- б) Определите отношение момента количества движения к магнитному моменту и сравните это отношение с величиной m/q .
- в) Считая, что μ_z электрона равно $\hbar q/2m$, вычислите максимальную скорость электрона на поверхности, обуславливающую данное значение магнитного момента. Приведите необходимые, с вашей точки зрения, пояснения. Величина $(4\pi\epsilon_0 c\hbar/q^2) = 1/\alpha$ равна 137.

К главе 29. Движение зарядов в электрическом и магнитном полях

29. 1. Заряженная частица (заряд q , масса покоя m_0) в момент времени $t = 0$ покоится в начале координат. Затем на нее начинает действовать постоянное электрическое поле, направленное вдоль оси x .
- а) Вычислите релятивистскую скорость и координаты частицы как функции времени.
- б) Как изменится ваш ответ, если в начальный момент частица имела скорость v_0 , направленную вдоль оси y ?
29. 2. В циклотроне протоны движутся в однородном магнитном поле по круговым траекториям. Найдите зависимость «циклотронной частоты» и угловой скорости протонов от q , B , m для протонов низкой энергии. Как изменится значение циклотронной частоты при увеличении энергии? При каком изменении энергии частота изменится на 1%?

29. 3. В момент времени $t = 0$ частица массы m с зарядом q покоится в начале координат. На частицу действует однородное электрическое поле $\mathbf{E}$, направленное по оси y , и однородное магнитное поле $\mathbf{B}$, направленное по оси z .
- Найдите последующее движение частицы, т. е. ее координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, предполагая движение нерелятивистским. Какое условие на $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ накладывает это предположение?
 - Какой характер будет иметь движение в том случае, если $E/B > c$?
 - Пусть разность потенциалов между двумя параллельными пластинами, одна из которых совпадает с плоскостью xz ($y = 0$), а другая находится на расстоянии d ($y = d$), равна $V_0 = E \cdot d$, и между пластинами приложено магнитное поле, параллельное пластинам. Пусть кинетическая энергия электронов, вылетающих из отрицательно заряженной пластины, равна нулю. При каком значении напряженности магнитного поля испущенные электроны не будут достигать другой пластины?
29. 4. Принцип фокусировки частиц в неоднородном поле может быть продемонстрирован с помощью следующей оптической модели:



Даже при одинаковых по модулю фокусных расстояниях линз существуют условия, когда такая система будет фокусировать.

- Определите зависимость l от d для света, падающего вдоль оптической оси.
- При каких условиях изображение будет действительным, при каких — мнимым?

*К главе 32. Показатель преломления
плотного вещества*

32. 1. В «Лекциях» рассматривалось распространение волн в веществе, состоящем из неполярных частиц. Было показано, что квадрат показателя преломления при низких частотах равен диэлектрической проницаемости. Будет ли этот вывод верен для других (изотропных) веществ?
32. 2. На частоте примерно 6 МГц ионосфера становится прозрачной. В рамках модели свободных электронов оцените плотность электронов в ионосфере.
32. 3. К металлу в течение долгого времени приложено постоянное электрическое поле, а затем оно мгновенно выключается. Используя модель свободных электронов, покажите, что время релаксации (т. е. время, в течение которого скорость дрейфа электронов падает в e раз) равно τ , где τ — среднее время между столкновениями.
32. 4. Внутри металла существуют решения уравнений Максвелла, имеющие вид плоских волн:

$$E_x = E_0 e^{i(\omega t - kx)},$$

где k — комплексное число. Для низких частот

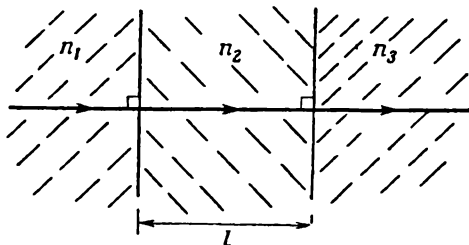
$$k = (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma \omega}{2e_0 c^2}}.$$

- а) Напишите выражение для магнитного поля такой волны.
- б) Какой угол образуют векторы E и B для произвольного z ?
- в) Какова разность фаз векторов E и B ?
[Если момент времени t_1 соответствует максимальной величине E , а t_2 — максимальной величине B , то разность фаз определяется как $\pm \omega(t_1 - t_2)$.]

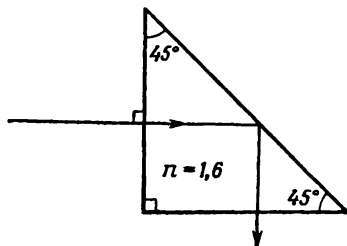
32. 5. При выводе выражения (32.50) «Лекций» (вып. 7, стр. 66) предполагалось, что в металле переход от вещественных значений n^2 к мнимым в ультрафиолетовой области очень резкий. На опыте же столь резкого перехода не наблюдается. Покажите, что с помощью более удачной аппроксимации n^2 теорию можно согласовать с экспериментом.

К главе 33. Отражение от поверхности

33. 1. а) Определите коэффициент пропускания для плоской электромагнитной волны, проходящей через трехслойный диэлектрик, показанный на рисунке.
- б) Покажите, что в случае $n_2 = \sqrt{n_1 n_3}$ и $l = \lambda_2/4$ коэффициент пропускания равен единице. (Покртия такого рода используются для «просветления» оптики в хороших фотокамерах и биноклях.)
- в) Какова толщина l для обычного бинокля, т. е. для оптического диапазона длин волн?
- г) Одну ли сторону линзы можно просветлять? Важно ли, какая сторона покрыта пленкой? Почему?



33. 2. Луч света с длиной волны $4500 \text{ \AA}$ (в пустоте) падает на призму и полностью отражается на угол 90° относительно первоначального направления. Показатель преломления призмы 1,6. Вычислите расстояние от длинной стороны призмы, на котором напряженность электрического поля уменьшается в e раз по сравнению с ее значением на поверхности. Предполагается, что свет поляризован так, что вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен к плоскости падения. Изменится ли ваш ответ, если $\mathbf{E}$ лежит в плоскости падения?



К главе 34. Магнетизм вещества

34. 1. Заряженная частица движется в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю $\mathbf{B}$. Покажите, что если $\mathbf{B}$ меняется медленно, магнитный момент орбитального движения частицы остается постоянным. Что мы понимаем под словом «медленно»?

К главе 35. Парамагнетизм и магнитный резонанс

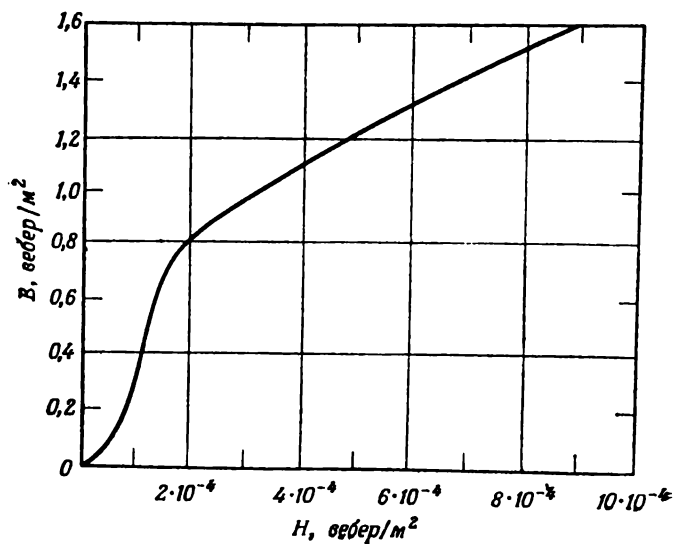
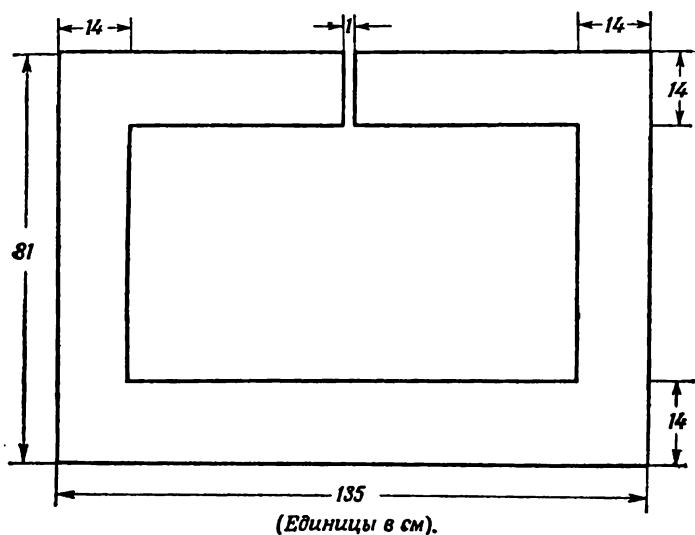
35. 1. В циклотроне, рассчитанном на низкие энергии, период обращения протонов по круговой орбите составляет 0,13 мксек. Ядерный магнитный резонанс для протона в магнитном поле циклотрона наступает при частоте 21 Мгц. Определите по этим данным g -фактор протона.
35. 2. Выведите формулу (35.9) способом, указанным в гл. 35 (вып. 7, стр. 123). Находится ли этот вывод в противоречии с утверждением, содержащимся в гл. 34 (вып. 7, стр. 104), о том, что в рамках классической физики парамагнетизм отсутствует?
35. 3. В 1 см³ парамагнитной соли содержится 10^{22} атомов с магнитным моментом в один магнетон Бора каждый. Соль помещается в однородное магнитное поле напряженностью 10 000 гс (1 вебер/м²). Выразите в процентах избыток параллельных полю спинов при комнатной температуре и температуре жидкого гелия.
35. 4. Следуя выводу, приведенному в гл. 35, для спина $1/2$, найдите квантовомеханическое выражение для парамагнитной восприимчивости частиц со спином 1.

К главе 36. Ферромагнетизм

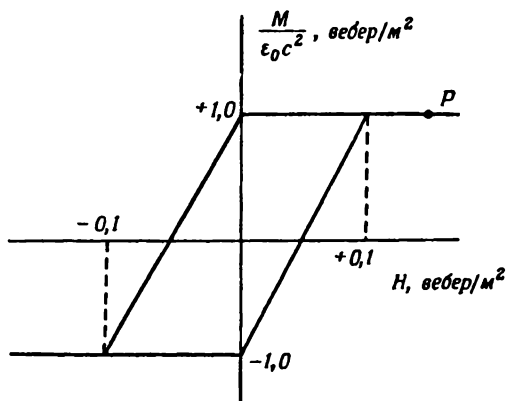
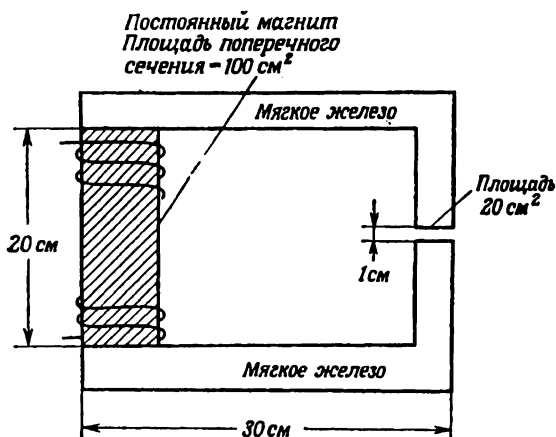
36. 1. Шар радиусом a однородно намагничен так, что его полный магнитный момент равен $\frac{4}{3}\pi a^3 M$, где M — намагниченность. Каковы должны быть поверхностные токи, создающие магнитное поле вне шара (тех же размеров), которое совпадает с полем, создаваемым намагниченным шаром. Покажите, что найденное распределение токов обладает таким же полным магнитным моментом.
36. 2. Сердечник магнита изготовлен из мягкого железа и обмотан 2150 витками проволоки, через которую течет ток силой 5 а. Кривая зависимости B от H для материала каркаса приведена на нижнем рисунке. Оцените величину магнитного поля в воздушном зазоре магнита. (Все размеры в сантиметрах.)

Каковы те глазные эффекты, которыми следует пренебречь при решении задачи?

Примечание. Так как эмпирическая зависимость B от H носит нелинейный характер, не нужно смущаться, что задача не решается аналитически и точно.



36. 3. Система состоит из постоянного магнита и двух полюсов, изготовленных из мягкого железа. Пропусканием сильного тока по внешней обмотке брусок намагничивается до точки P на кривой зависимости M от H . Найдите напряженность магнитного поля в зазоре после выключения тока, предполагая, что магнитная проницаемость мягкого железа бесконечна, и пренебрегая утечкой магнитного потока на краях зазора



36. 4. Очень длинный железный стержень в форме цилиндра однородно намагничен так, что вектор намагниченности $\mathbf{M}$ направлен по оси цилиндра. Найдите B и H внутри стержня, пренебрегая краевыми эффектами. Чему будет равна магнитная индукция B в центре игольчатой полости, если ее вырезать вдоль оси стержня?

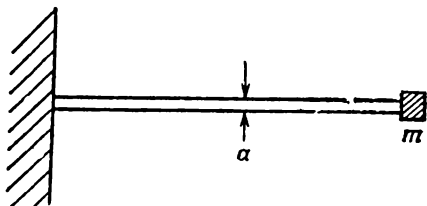
К главе 38. Упругость

38. 1. В ракетной технике необходимы конструкции, которые обладают максимальной прочностью при минимальном весе.

а) Сравните радиусы двух цилиндрических стержней из алюминия и из стали, обладающих одинаковой жесткостью и длиной. (Жесткость определяется как отношение приложенной поперек стержня силы к результирующему смещению.)

б) Сильно ли отличаются массы этих стержней?

38. 2. Алюминиевый стержень квадратного сечения одним концом заделан, а к свободному его концу прикреплена масса m . Найдите собственную частоту колебаний такой системы, если площадь сечения стержня равна a^2 , масса его во много раз меньше массы m ; размерами самой массы m можно пренебречь.



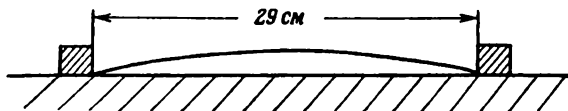
38. 3. В начале курса (вып. 4, стр. 161) скорость звука в жидкости определялась как производная давления по плотности. Покажите, что для продольных волн в твердом теле (плоские волны сжатия) фазовая скорость определяется выражением

$$v_{\text{прод}}^2 = \frac{(1 - \sigma) Y}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)\rho},$$

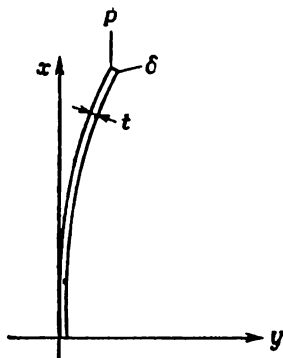
где σ — отношение Пуассона; Y — модуль Юнга. Эта формула справедлива лишь для продольной волны в «безграничной» среде. В такой волне частицы движутся параллельно направлению распространения. Поперечное же смещение частиц в продольной волне отсутствует в отличие от того, что имеет место, скажем, при сжатии стержня, когда поперечные размеры стержня увеличиваются. Каковы, по вашему мнению, должны быть размеры тела, чтобы приведенное выше выражение для фазовой скорости было справедливо?

38. 4. Стальная линейка длиной $L = 30$ см, шириной $a = 1,5$ см и толщиной $b = 0,08$ см концами упирается в две планки, прибитые к столу на расстоянии $l = 29$ см одна от другой, как показано на рисунке.

- а) Какой кривой описывается форма изогнутой линейки?
 б) Какова сила, с которой линейка упирается в планки?



38. 5. Нижний конец вертикального стержня заделан, а к его верхнему свободному концу приложена сила. Длина стержня равна L . Поперечное сечение стержня имеет форму прямоугольника со сторонами t (толщина) и δ (ширина). Определите силу, приводящую к показанной на рисунке деформации стержня.



К главе 40. Течение «сухой» воды

40. 1. а) Докажите справедливость сделанного в гл. 40 (вып. 7) утверждения о том, что в невязкой жидкости давление одинаково во всех направлениях.
 б) В качестве математического упражнения докажите весьма полезное векторное тождество, использованное в гл. 40:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}) + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}),$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = (\nabla \times \mathbf{v}).$$

40. 2. Жидкость вращается в цилиндре кругового сечения с постоянной угловой скоростью ω . Найдите форму воронки, образующейся на поверхности жидкости, если на расстоянии r от оси частица жидкости вращается со скоростью $v = \omega r$. Покажите, что циркуляция жидкости, отнесенная к единице площади, т. е. $\text{rot } \mathbf{v}$, равна удвоенной угловой скорости вращения жидкости.

40. 3. Шар массой m и радиусом a движется с постоянной скоростью в «сухой» воде. Покажите, что сумма кинетических энергий шара и жидкости равна

$$\frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{2} \right) v^2,$$

где M — масса жидкости, вытесненная шаром.

Чему равен суммарный импульс шара и жидкости?

К главе 41. Течение «мокрой» воды

41. 1. Если шар радиусом a движется в вязкой жидкости равномерно и достаточно медленно, так что поток обтекающей жидкости можно считать ламинарным, то сила, заставляющая его двигаться, равна вязкой силе трения, действующей со стороны жидкости на шар. Хотя эту силу вы можете определить точно, представляет интерес найти для нее выражение из соображений размерностей, перечислив все параметры, от которых эта сила может зависеть. Прodelайте это. Можете ли вы качественно обосновать, почему параметры входят в найденное выражение так, а не иначе?

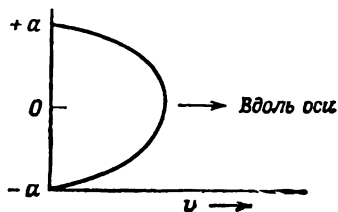
41. 2. Медленный поток вязкой жидкости в цилиндрической трубке можно считать ламинарным, причем профиль скоростей потока выглядит примерно так, как представлено на рисунке. Покажите, что если r — расстояние от оси трубки, η — коэффициент вязкости, а $(P_1 - P_2)/L$ — перепад давления на единице длины трубки, то профиль скоростей в жидкости описывается выражением

$$v(r) = \frac{1}{4\eta} \frac{(P_1 - P_2)}{L} (a^2 - r^2).$$

По аналогии с законом Ома пропускную способность трубки Q можно связать с перепадом давления $\Delta P = P_1 - P_2$ соотношением

$$\Delta P = QR,$$

где R — сопротивление трубки. Найдите сопротивление R для трубок радиусом a и длиной L . Как вы думаете, проведение подобной аналогии лишь простая игра слов или есть основания считать такие аналогии полезными? Что является аналогом конденсатора?



41. 3. Дно широкого бассейна покрыто тонким слоем воды (любой «несжимаемой» жидкости с вязкостью η). На поверхности воды плавают тонкая деревянная доска, «дно» которой находится на расстоянии d от дна бассейна. Все остальные размеры доски во много раз больше d . Доска движется горизонтально с малой скоростью v . Чему равна скорость диссипации энергии в единице объема в воде вблизи середины доски?

К главе 1. Амплитуды вероятности

1. 1. В этой главе описан мысленный эксперимент по интерференции электронов на двойной щели. По интерференционной картине, приведенной на фиг. 1.1 «Лекций» (вып. 8, стр. 11), можно оценить длину волны λ , связанную с амплитудными функциями φ_1 и φ_2 . Обозначим расстояние между центрами щелей буквой a .
 - а) Чему равна λ ?
 - б) Используя кривые для P_1 и P_2 , рассчитайте ожидаемую величину P_{12} в центре полосы, в первом боковом максимуме и первых двух минимумах интерференционной картины. Сравните полученные результаты с кривой P_{12} .
1. 2. Рассмотрите эксперимент по интерференции электронов на двойной щели, описанный в предыдущей задаче, предположив, что расстояния от электронной пушки до щелей и от щелей до экрана очень велики по сравнению с промежутком между щелями, а ширина щелей много меньше этого промежутка. Дайте ответ (по возможности количественный) на следующие вопросы:
 - а) Что произойдет с интерференционной картиной P_{12} , если электронную пушку сдвинуть вверх на расстояние D ?
 - б) Как изменится интерференционная картина, если расстояние между щелями удвоить?
 - в) Что случится, если первую щель сделать вдвое шире второй?
1. 3. Монохроматический свет, поляризованный в вертикальной плоскости, падает на пленку — поляририд, «ось пропускания» которой образует с вертикалью угол θ . Чему будет равно отношение интенсивности света, прошедшего через пленку, к интенсивности падающего света? А что сделает поляририд с отдельным падающим фотоном?

1. 4. Пучок электронов с энергией 20 кэВ проходит через тонкую поликристаллическую золотую фольгу, а затем попадает на фотопластинку. Области почернения на пластинке имеют форму концентрических колец с центрами на оси пучка. Почему? Рассчитайте диаметр колец, если расстояние от фольги до пластинки равно 10 см.

1. 5. Вернемся к обычному интерференционному опыту с двойной щелью (см. фиг. 1.1 «Лекций», вып. 8, стр. 11). Если a_1 и a_2 — два комплексных числа, равные амплитудам вероятности нахождения электронов соответственно в щелях 1 и 2, то как выглядит формула для относительной интенсивности распределения электронов на экране в зависимости от x — расстояния от центральной точки? Считайте x приближенно малой величиной; ответ должен выражаться через расстояния между щелями и от щелей до экрана.

1. 6. В дифракционном опыте (схема которого приведена на рисунке) частицы, испускаемые источником, имеют импульс p_0 , массу m и скорость v .

а) Чему равно расстояние a между центральным максимумом и его ближайшим соседом? Считайте

$$L \gg d, \quad L \gg a.$$

б) Внешнее воздействие меняет фазу для верхнего пути на $\delta\varphi_1$, а для нижнего пути на $\delta\varphi_2$. Покажите, что центральный максимум смещается при этом на расстояние S , определяемое выражением

$$S = + (\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) \frac{L}{d} \frac{\hbar}{p_0}.$$

Таким образом, если величина $(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2)$ для всех путей одинакова, то на расстояние S смещается вся дифракционная картина и мы можем сказать, что на расстояние S отклоняются все частицы.

в) Предположим, что в области A частицы обладают небольшой потенциальной энергией, которая зависит только от вертикальной координаты. Тогда импульс частиц на высоте x над центральной линией [обозначим его $p(x)$] будет несколько отличаться от $p(0)$ — своего значения на центральной линии. Покажите, что

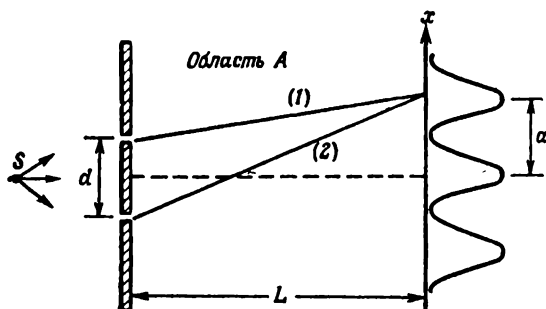
$$p(x) = p(0) + \frac{m}{p(0)} (V(0) - V(x)),$$

или, когда $V(x)$ меняется с расстоянием медленно, $p(x) = p(0) + Fx/v$, где $F = -dV/dx$.

- г) При условиях, описанных в пункте (в), импульсы при движении по прямым (1) и (2) будут отличаться друг от друга (как и длины волн). Покажите, что разность фаз для верхнего и нижнего путей равна

$$(\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) = \frac{d}{2v} \frac{F}{\hbar} L.$$

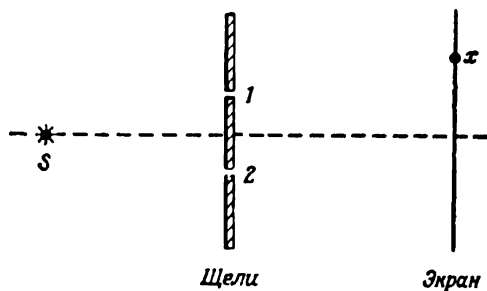
(Заметим, что среднее вертикальное расстояние между двумя этими прямыми равно $d/2$.) Покажите, что интерференционные полосы смещаются вверх на величину $1/2 T^2 (F/m)$, где $T = L/v$ — время пролета (в классическом смысле) от щели до экрана. Поясните смысл результата.



1. 7. Электроны со спином $1/2$ испускаются источником S , помещенным перед экраном с двумя щелями, как показано на рисунке. Предположим, что электрон, достигший щели, проходит через нее с амплитудой α , если его спин направлен вверх, и с амплитудой β , если его спин направлен вниз. Предположим далее, что различить, через какую щель электрон прошел, невозможно.

- а) Если все электроны испускаются «спином вверх», рассчитайте распределение интенсивностей на экране в точке x , выразив ее через α , β и амплитуды $\langle x|s \rangle$ (см. вып. 8, стр. 12, 13).
- б) Как отличается это распределение от того случая, когда все электроны испускаются «спином вниз», при прочих равных условиях?

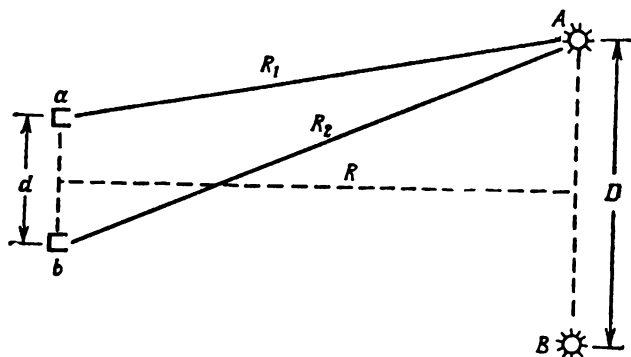
- в) Если направление спинов случайно, а все остальные условия опыта сохраняются, то чем будет отличаться интерференционная картина от случая (а)?



1. 8. Сколь это ни удивительно, но большие интерференционные эффекты можно наблюдать даже в том случае, если одна из «интерферирующих возможностей» имеет не очень большую вероятность. Покажите, что в эксперименте по дифракции на двух отверстиях, даже когда вероятность проникнуть через одно из них в 100 раз меньше, чем через другое, дифракционный максимум все еще на 50% выше минимума.
1. 9. Расстояние до ближайших к Земле звезд столь велико, что их диаметр определить нельзя даже при помощи лучших современных телескопов, поскольку их угловое разрешение больше «угловых размеров» звезд. Диаметр звезд впервые определил Майкельсон, используя оптический интерферометр. Но точности этого метода едва хватает для самых близких звезд. В 1956 г. Браун и Твисс предложили новый метод для таких измерений, названный ими «методом корреляции интенсивностей» [Nature, 178, 1046 (1956)]. Они опробовали его на звезде Сириус. Для этого они взяли два параболических рефлектора (авторы использовали зеркала от старых прожекторов), в фокусе каждого из которых был установлен фотоумножитель. Выходы умножителей соединялись коаксиальным кабелем с электронной схемой, которая регистрировала среднее значение от произведения токов в обоих умножителях (так называемую «корреляционную функцию»). По поведению этого произведения в зависимости от расстояния между зеркалами определялся угловой диаметр звезды. В то время многие физики утверждали, что этот метод не годится, поскольку свет — это фотоны, а каждый фотон попадает либо на одно зеркало, либо на другое, и, следовательно, никакой корреляции двух токов наблю-

даться не может. Вы можете опровергнуть этот аргумент, рассматривая следующий идеализированный эксперимент. Два небольших источника света, скажем две лампочки A и B , помещаются на больших расстояниях от фотонных счетчиков a и b . Геометрические условия опыта показаны на рисунке. Счетчики a и b включены в «схему совпадений», которая регистрирует p_{12} — количество случаев в единицу времени, когда фотоны регистрируются *одновременно* (т. е. в течение одного малого промежутка времени τ) в обоих детекторах. Пусть $\langle a|A \rangle$ — амплитуда появления фотона, испущенного источником A , в детекторе a в течение данного промежутка времени, определяемого разрешающей способностью схемы. Тогда $\langle a|A \rangle = ce^{i\alpha_1}$, где c — комплексная постоянная, а $\alpha_1 = kR_1$ (R_1 — расстояние от A до a , k — волновое число. Аналогично, $\langle b|A \rangle = se^{i\alpha_2}$, где $\alpha_2 = kR_2$, а R_2 — расстояние от A до b . Покажите, что скорость счета совпадений пропорциональна $2 + \cos 2k(R_2 - R_1)$.

Как использовать этот результат для определения D , если R известно? Пренебрегайте тем фактом, что реальный процесс есть «наложение» таких простых процессов, поскольку свет приходит из всех областей поверхности звезды, а не только из крайних, диаметрально противоположных точек.



К главе 2. Тожественные частицы

2. 1. Радиопередатчик излучает сигнал мощностью 1000 кВт на частоте 1 МГц.
 - а) Какова энергия (в эв) каждого излученного кванта?
 - б) Сколько квантов излучается за каждый период колебаний электромагнитного поля? (Высокая степень

когерентности этих квантов возможна, поскольку они являются бозе-частицами.)

2. 2. Внутри полости в абсолютно черном теле величина интенсивности излучения $I(\omega)\Delta\omega$ в интервале частот от ω до $\omega + \Delta\omega$ на единицу объема дается формулой Планка.
 - а) Как ведет себя $I(\omega)$ при малых ω ? При больших ω ?
 - б) При какой частоте на единичный интервал частот приходится максимальная энергия?
 - в) При какой длине волны на единичный интервал длин волн приходится максимальная энергия?
 - г) Оцените температуру на поверхности Солнца, предполагая, что максимум интенсивности его излучения приходится на середину видимого спектра.
2. 3. Оцените напряженность магнитного поля, которая требуется для того, чтобы выстроить спины обоих электронов в атоме гелия в одном направлении. (Приближенно рассматривайте атом гелия как гармонический осциллятор с основной частотой, соответствующей видимому свету. У атома гелия «в основном состоянии» оба электрона находятся на самом нижнем уровне, и их спины направлены в противоположные стороны. Согласно принципу запрета Паули, для того чтобы направления спинов электронов совпали, одному из них придется перейти на следующий уровень.)
2. 4. До открытия нейтронов предполагалось, что ядра состоят из протонов и электронов. Покажите, что в таком случае атом N^{14} (атом азота, масса ядра которого примерно в 14 раз больше массы протона) был бы бозе-частицей. Опытные факты (спектр молекулы азота) показывают, что этот атом есть ферми-частица. Это было первое свидетельство в пользу существования новой ядерной частицы. Покажите, как нейтронная гипотеза решает эту задачу.
2. 5. Система атомов находится в тепловом равновесии с излучением. Каждый атом имеет два возбужденных состояния с энергиями ΔE и $2\Delta E$, причем переходы между основным и наивысшим возбужденным состояниями (частота излучения $\omega = 2\Delta E/\hbar$) запрещены.

$\Delta E \left\{ \begin{array}{l} \text{-----} \text{Второй уровень энергий } (N_2 \text{ атомов}). \\ \text{-----} \text{Первый уровень энергий } (N_1 \text{ атомов}) \\ \Delta E \left\{ \begin{array}{l} \text{-----} \text{Уровень основного состояния } (N_0 \text{ атомов}). \end{array} \right. \end{array} \right.$

 - а) Выразите отношения N_1/N_0 и N_2/N_1 через среднее число фотонов $\bar{n}(\omega)$ в данном состоянии.

- б) Получите простое выражение для $\bar{n}(\omega)$, учитывая, что фотоны являются бозонами. Искомое выражение должно содержать только $\Delta E/kT$.
- в) Найдите приближенные выражения для $\bar{n}(\omega)$ в двух предельных случаях:

$$\hbar\omega \gg kT,$$

$$\hbar\omega \ll kT.$$

2. 6. В лазере большое число атомов одновременно переводится в возбужденное состояние. Потом появление небольшого количества света определенного типа индуцирует лавинообразное излучение, в которое дают вклад все возбужденные атомы, что приводит к образованию очень большого числа фотонов с совершенно одинаковой длиной волны, испускаемых строго в одном направлении. Можно ли надеяться, что в один прекрасный день кто-нибудь создаст подобное же устройство, излучающее нейтрино (частицы с массой, равной нулю, и спином $1/2$)?
2. 7. Покажите, что для двух нетождественных невзаимодействующих частиц вероятность того, что одна переместится из a в b , в то время как другая переместится из c в d , есть произведение двух сомножителей P_{ab} и P_{cd} , где P_{ab} — вероятность, что первая частица в отсутствие второй частицы переместится из a в b , а P_{cd} — вероятность, что вторая частица в отсутствие первой переместится из c в d . Является ли существенным обстоятельством то, что частицы нетождественны?
2. 8. Дейтрон является бозе-частицей со спином единица; таким образом, пучок дейтронов может находиться в одном из трех состояний с проекциями спина $+1, 0, -1$. Производится опыт, в котором дейтроны рассеиваются на дейтронах. Как зависит вероятность регистрации дейтронов от угла рассеяния θ (угол между направлениями движения дейтрона до и после столкновения в системе центра масс)? Предположим, что направление спина в процессе рассеяния не меняется, а $f(\theta)$ — это амплитуда отклонения на угол θ .
2. 9. Пусть $f_1(\theta)$ — амплитуда рассеяния π -мезона на протоне, а $f_2(\theta)$ — на нейтроне. Как выразить *вероятность* того, что π -мезон рассеется на ядре гелия на угол θ через P_1 и P_2 — вероятности рассеяния на протоне и на нейтроне? Рассмотрите два случая:
- а) отдача протона или нейтрона после рассеяния разрушает ядро;

б) отдача настолько слаба, что ядро остается «неповрежденным».

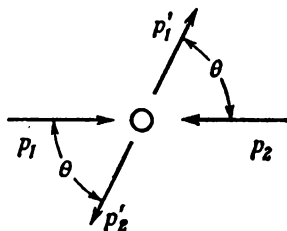
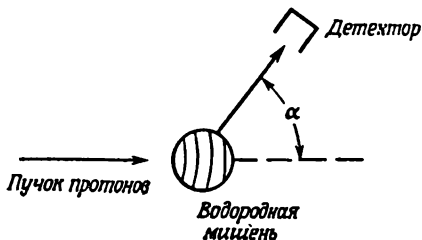
Можете ли вы сказать, в каком случае рассеяние сильнее? Ваши ответы должны зависеть от предположений, сделанных при описании процесса (а).

2.10. Предположим, что в эксперименте по рассеянию пучок нейтронов падает на нейтронную мишень. Детектор установлен с таким расчетом, чтобы он регистрировал нейтроны, рассеявшиеся на угол θ в системе центра масс; f — амплитуда рассеяния частицы на этот угол без изменения спинового состояния; g — амплитуда рассеяния на тот же угол с «переворотом» спина (за счет обмена направлениями спинов с частицей мишени). Если предположить, что f и g не зависят от θ , то какова будет вероятность, что детектор зарегистрирует нейтрон, если:

- спины обоих нейтронов (и рассеиваемого и рассеивающего) направлены вдоль оси $+z$;
- спины нейтронов пучка выстроены вдоль положительного направления оси z , а спины нейтронов мишени — вдоль отрицательного;
- падающий пучок не поляризован, а мишень поляризована в направлении $+z$;
- и пучок и мишень не поляризованы;
- как изменится ответ на вопрос (а), если мишень будет состоять из поляризованных протонов при равенстве амплитуд нейтрон-нейтронного и нейтрон-протонного рассеяния?

Считайте, что детектор одинаково эффективно регистрирует и нейтроны, и протоны.

2. 11. Пучок нерелятивистских протонов проходит через тонкую мишень из жидкого водорода, а потом, как показано на рисунке, рассеянные протоны регистрируются под некоторым углом α к падающему пучку. Процесс рассеяния протона на протоне можно анализировать в системе центра масс, как показано на рисунке.



Два протона (p_1 и p_2) движутся навстречу друг другу с одинаковыми скоростями; после соударения два протона (p'_1 и p'_2) разлетаются вдоль прямой, которая составляет угол θ с первоначальным направлением. Если выбрать в качестве оси z направление, перпендикулярное плоскости рассеяния, то для каждого протона проекция спинового момента на эту ось может иметь значение J_z , равное $+\hbar/2$ или $-\hbar/2$. Будем говорить, что в первом случае спин направлен «вверх», а во втором — «вниз». Предположим, что спины обоих протонов направлены вверх и что $f(\theta)$ есть амплитуда рассеяния протона p_1 на угол θ с попаданием в детектор. Поскольку мы не можем сказать, *какой* протон зарегистрирован счетчиком, то амплитуда того, что *какой-то* протон вылетит под углом θ , равна $f(\theta) - f(\pi - \theta)$. Знак *минус* появляется потому, что протоны — ферми-частицы. Поэтому вероятность зарегистрировать протон под углом θ равна

$$|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2.$$

Предположим теперь, что спин протона p_1 направлен вверх, а спин p_2 — вниз, амплитуда рассеяния частицы p_1 в направлении детектора *без переворота* спина равна $f'(\theta)$, а *с переворотом* спина $g(\theta)$; амплитуда рассеяния зависит от относительной ориентации спинов.

В этом случае амплитуду появления в детекторе протона со спином, направленным вверх, можно записать в виде $f'(\theta) + g(\pi - \theta)$.

- а) Какова связь между θ и α ?
- б) Какова амплитуда появления в детекторе протона со спином вниз, если до рассеяния спины сталкивающихся протонов были направлены в разные стороны?
- в) Предположим, что «обычный» пучок неполяризованных протонов рассеивается на обычной неполяризованной мишени и что детектор не реагирует на поляризацию. Чему равна *вероятность* рассеяния на угол θ ?
- г) Покажите, что при $f' = f$ и $g = 0$ рассеяние протонов с хаотически ориентированными спинами представляет собой смесь «чисто фермионного» рассеяния с амплитудой $f(\theta) - f(\pi - \theta)$ и «чисто бозонного» рассеяния, амплитуда которого равна $f(\theta) + f(\pi - \theta)$, т. е. что

$$P = A |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + B |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2.$$

Вычислите A и B .

- 2.12. Предположим, что N электронов находятся в очень большом ящике объемом V в состоянии с наименьшей

возможной энергией. Покажите, что в пренебрежении взаимодействием между электронами каждый уровень в ящике занят двумя электронами, причем импульс, соответствующий каждому уровню, $\hbar k = p$, меньше величины $p_{\text{макс}}$, определяемой соотношением

$$N = \int_0^{p_{\text{макс}}} V \cdot 2 \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3}.$$

Чему равна энергия U всех электронов? Свяжите эту внутреннюю энергию U с объемом ящика и найдите таким образом давление этого так называемого вырожденного электронного газа. Покажите, что объем и давление связаны соотношением $PV^\gamma = \text{const}$, и найдите γ .

- 2.13. Материя в звездах, известных под названием «белые карлики», сжата так сильно, что к ней применима теория, рассмотренная в последней задаче. Если ρ — плотность вещества звезды, то $\rho/2M_p$ — число протонов в 1 м^3 этого вещества (M_p — масса протона; мы предполагаем, что ядра содержат примерно столько же протонов, сколько нейтронов). В уравнении к задаче 2.12 положим $N/V = \rho/2M_p$. Уравнения равновесия звезды из такого вещества, равновесия, поддерживаемого гравитационным притяжением, можно найти в книгах по астрофизике, и они записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} P &= A\rho^{5/3}, \\ \frac{dP}{dr} &= - \frac{G\rho M(r)}{r^2}, \\ \frac{dM(r)}{dr} &= 4\pi r^2 \rho. \end{aligned}$$

Можете ли вы объяснить вид этих уравнений и вывести формулу или указать численное значение для A ? Считайте, что все давление создается вырожденным электронным газом, а присутствие нуклонов практически не сказывается (кстати, почему?).

К главе 3. Спин единица

3. 1. Докажите высказанное в гл. 3 «Лекций» (вып. 8) утверждение, что если прибор C можно разделить на две части A и B , то

$$\langle \chi | C | \varphi \rangle = \sum_k \langle \chi | B | k \rangle \langle k | A | \varphi \rangle.$$

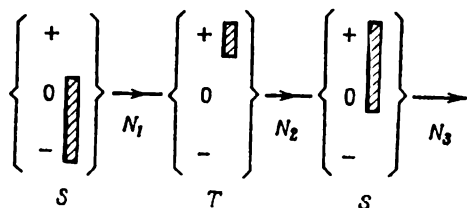
3. 2. Три «усовершенствованных» прибора Штерна — Герлаха, описанные в гл. 3, которые разделяют пучок на компоненты, соответствующие различным значениям проекции спина (но без *пространственного* разделения пучка), устанавливаются последовательно друг за другом, и через них пропускается пучок частиц со спином 1. Первая и третья установки ориентированы в одном и том же направлении, а средняя устанавливается под произвольным углом. В обозначениях, которые использовались в гл. 3, это будет выглядеть так:

$$\left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{c} + \\ 0 \\ - \end{array} \right\}$$

$S \qquad T \qquad S$

- а) В установке T открыта одна щель. Будет ли распределение пучка по трем состояниям в конечном состоянии S зависеть от входного состояния, т. е. от пропорций, в которых смешаны состояния $+S$, $0S$ и $-S$ в начальном пучке. Почему?
- б) А если две щели в установке T открыты?
- в) А если все три щели в T открыты?

3. 3. Тройной «усовершенствованный» эксперимент Штерна — Герлаха проводится с частицами со спином 1 по следующей схеме:



Все три прибора расположены на одной прямой, но средний прибор T повернут на 90° относительно двух других. Пучок частиц со спином 1 падает слева. Пучок, который выходит из первого прибора S , имеет интенсивность N_1 частиц в секунду.

- а) Чему равна интенсивность пучка N_2 на выходе из прибора T ?
- б) Какова интенсивность пучка N_3 на выходе из последнего прибора S ?
- в) Каковы будут значения N_2 и N_3 , если заслонку из прибора T удалить?

3. 4. Рассмотрим последовательность «усовершенствованных» приборов Штерна — Герлаха S , T и S' , через которые проходит пучок частиц со спином 1. (Прибор T повернут вокруг оси x на 90° по отношению к S и S' .)

а) Если из прибора S выходит N_0 частиц, найдите, какое число частиц следует ожидать на выходе прибора S' в состояниях $|+S'\rangle$ и $|0S'\rangle$. (Обозначим соответствующие значения $N_{+S'}$ и $N_{0S'}$.)

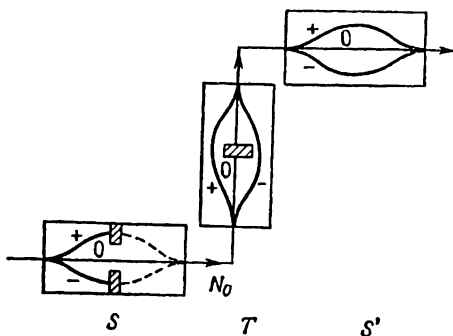
б) Предположим, что мы имеем «прозрачные детекторы», которые можно помещать в пучки $+$ и $-$ прибора T . Свойство этих детекторов состоит в том, что при прохождении частицы через такой детектор он сигнализирует об этом, не меняя спинового состояния частицы. Кроме того, импульс частицы не изменяется сколько-нибудь заметно в том смысле, что ее траектория внутри установки одинакова как при наличии детектора, так и без него.

Если детекторы установлены в позициях $+$ и $-$ прибора T (позиция 0 заблокирована), каковы будут ожидаемые числа отсчетов N_{+T} , N_{-T} , $N_{+S'}$ и $N_{0S'}$, если из прибора S вылетает N_0 частиц?

в) Как изменится результат для $N_{+S'}$ в описанном эксперименте, если после его проведения обнаружится, что числа отсчетов N_{+T} и N_{-T} не регистрировались?

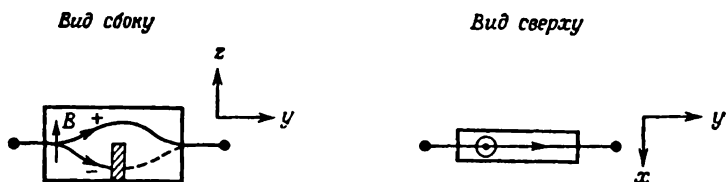
г) Если эффективность каждого детектора равна 50% (т. е. в половине случаев пролетающая через детектор частица не взаимодействует с ним), чему будут тогда равны значения $N_{+S'}$ и $N_{0S'}$?

д) Чему будут равны $N_{+S'}$ и $N_{0S'}$, если блокировки состояний $+\mathcal{S}$ и $-\mathcal{S}$ удалены и N_0 частиц выходит из S (детекторы из прибора T удалены)? Считайте пучок неполяризованным.



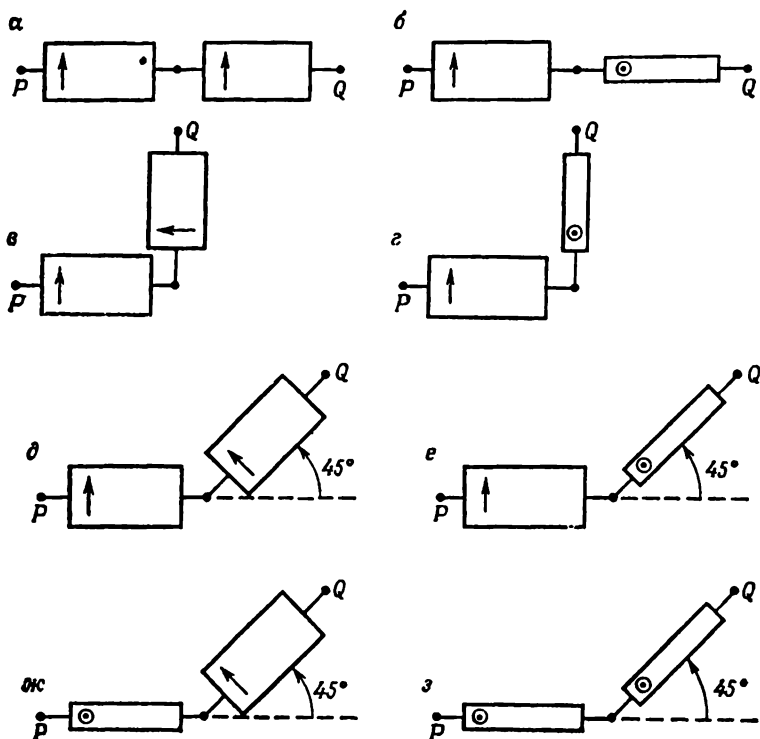
К главе 4. Спин одна вторая

4. 1. Представьте себе, что пучок атомов со спином $1/2$ фильтруется двумя «усовершенствованными» приборами Штерна — Герлаха, установленными один за другим. Предполагается, что каждый прибор пропускает только один пучок, как изображено на фиг. 1.



Фиг. 1.

На фиг. 2 приведено несколько вариантов относительного расположения приборов. Пусть в прибор P попадает N



Фиг. 2.

неполяризованных атомов. Сколько атомов должно появиться в точке Q ?

4. 2. В некий прибор попадает N частиц со спином $1/2$, причем амплитуды для направления спина вверх и вниз вдоль оси z равны соответственно a и b . Покажите, что вероятность обнаружения этой частицы в любой точке внутри прибора равна $|aX + bY|^2$, где X и Y — некоторые комплексные постоянные, характеризующие прибор. Как будет выражаться эта вероятность через X и Y , если:

- 1) спин влетевшей частицы направлен вверх? вниз?
- 2) спин направлен вдоль оси $+x$? $-x$?
- 3) спин направлен вдоль оси, направление которой определяется полярными углами θ и φ ?

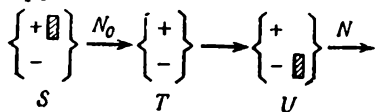
Представить себе, что спиновое состояние падающих частиц определяется «волей случая», можно несколькими способами:

- а) для решения вопроса о том, в положительную или отрицательную сторону оси z будет направлен спин данного электрона, каждый раз бросается монета;
- б) делается то же самое, но вдоль оси x ;
- в) спин каждого электрона ориентируется в некотором направлении θ, φ , но это направление каждый раз выбирается случайно, так что потом приходится все усреднять по телесному углу $\sin \theta d\theta d\varphi/4\pi$.

Покажите, что вероятность обнаружения частицы одна и та же для всех трех видов определения понятия «случайная ориентация».

Предположим, что частицы со спином $1/2$ вылетают из отверстия в стенке, а перед этим направление их спина определяется одним из трех указанных способов. Можете ли вы придумать какой-нибудь способ, при помощи которого, находясь по «эту» сторону стенки, можно определить, какой из трех методов в действительности использовался?

4. 3. Три прибора Штерна — Герлаха установлены друг за другом в последовательности, показанной на фиг. 1.

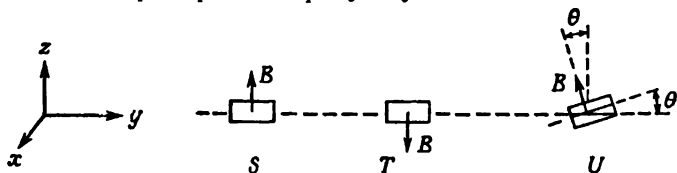


Фиг. 1.

Выразите N (число атомов со спином $1/2$, выходящих из прибора U) через N_0 (число атомов, выходящих из S) и величины типа $\langle +T | +U \rangle$ и т. д.

Затем рассмотрите ту же самую последовательность приборов, но для случая, когда поля B ориентированы согласно схеме, приведенной на фиг. 2. В частности,

- I) поле B прибора T повернуто антипараллельно полю B прибора S ;
- II) поле B прибора U образует угол θ с осью z .



Фиг. 2.

- а) Получите явные выражения для $\langle +T | -S \rangle$ и $\langle -T | -S \rangle$.
- б) Найдите явный вид $\langle +U | -S \rangle$, используя для упражнения *только* таблицы преобразований при вращениях вокруг осей z и y .
- в) Рассмотрите результат случая (б) для предельных значений

$$\theta = 0,$$

$$\theta = \pi.$$

Объясните ответ при $\theta = \pi$, сравнивая его с $\langle +T | -S \rangle$ для случая (а).

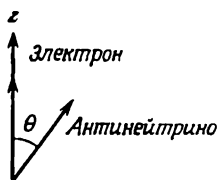
4. 4. Призма из кальцита расщепляет пучок света, направленный вдоль оси z , на два пучка x и y . Отдельный фотон, падающий на эту призму, характеризуется определенной амплитудой попадания в один из этих пучков x , y . Такой же образец кальцита, но перевернутый, можно использовать для соединения этих лучей снова в один и т. д., аналогично тому, как это делается с частицами в приборе Штерна — Герлаха. Ось другой призмы T можно располагать под углом θ в плоскости $x-y$, переводя пучок в состояния x' , y' или xT , yT . Получите амплитуды $\langle xT | xS \rangle$, $\langle yT | yS \rangle$ и т. д., используя свои знания классической теории поляризации света, считая, что при большом числе фотонов в пучке интенсивность будет хорошо описываться этими классическими результатами. Рассматривайте повороты только вокруг оси z , поскольку свет нельзя «остановить». (Повороты вокруг других осей можно описывать скорее по их действию на направление распространения света, а не на поляризацию; в этом смысле свет, хотя он и является системой с двумя состояниями, очень сильно

отличается от электрона, который тоже представляет собой систему с двумя состояниями.)

4. 5. Найдите все четыре элемента матрицы $\langle j|A|i\rangle$, где индексы i и j могут принимать значения x и y , для следующих приборов, через которые пропускается свет:

- а) x , y — анализатор из кальцита и такой же синтезатор, причем луч y блокирован;
- б) тот же прибор, повернутый на угол θ ;
- в) поляририд, ось которого направлена по оси x ;
- г) поляририд, ось которого образует с осью x угол θ ;
- д) анализатор и синтезатор из кальцита, между которыми имеется слой стекла, сдвигающий фазу луча x на угол φ ;
- е) анализатор и синтезатор из кальцита, причем оба луча проходят через одно и то же стекло;
- ж) анализатор и синтезатор, повернутые на 45° , а также слой стекла в луче x , увеличивающий фазу на 90° ;
- з) пластинка толщиной $\lambda/4$;
- и) пластинка из двоякопреломляющего вещества, причем оптическая ось параллельна оси x (получите общую формулу для слоя этого вещества произвольной толщины);
- к) раствор сахара, который поворачивает плоскость поляризации вправо на угол θ ;
- л) устройство, которое расщепляет исходный луч на x и y , приводит луч x в плоскость y (пропуская его через раствор сахара, который поворачивает плоскость поляризации на 90°) и снова соединяет оба луча в один.
- м) Покажите, что с помощью прибора, описанного в пункте (л), можно устроить вечный двигатель.

4. 6. Согласно теории бета-распада, в одном из частных случаев этого ядерного превращения (в том, который называется «разрешенный ферми-переход» и происходит без изменения момента количества движения и четности ядра) электрон, движущийся вдоль оси z со скоростью v , испускается со спином вдоль оси z с амплитудой $A \sqrt{1 - v/c} \sin \theta/2$ и со спином против оси z с амплитудой $A \sqrt{1 + v/c} \cos \theta/2$. (Здесь A — некоторая константа, θ —



угол, образуемый с осью z направлением испускания нейтрино. Так уж случилось, что спин антинейтрино всегда ориентирован вдоль направления его движения.)

- а) Чему равна вероятность того, что спин направлен вверх по оси z ? А вниз?
- б) Рассчитайте вероятность того, что спин направлен вдоль оси $+x$ (нейтрино вылетает в плоскости xz)? Вдоль направления оси $-x$?
- в) Вдоль направлений $\pm y$? (Строго говоря, это относится к системе координат, движущейся вместе с электроном.)
- г) Если антинейтрино, как обычно, не регистрируется (т.е. по всем направлениям его испускания производится усреднение), каков будет ответ на вопрос (а)?

К главе 5. Зависимость амплитуд от времени

- б. 1. Частица со спином 1 и магнитным моментом μ в магнитном поле, направленном по оси z , может находиться в состояниях $+$, 0 и $-$, энергии которых равны $-\mu B$, 0 и $+\mu B$ соответственно. Покажите методами квантовой механики, что в неоднородном магнитном поле пучок таких частиц расщепится на три, и найдите законы, по которым эти пучки отклоняются, полагая отклонение малым. Ответ должен выражаться через протяженность области, в которой действует поле, начальный импульс частицы и т. д. Затем покажите, что такая частица будет «прецессировать» (в квантовомеханическом смысле), используя при этом коэффициенты, приведенные в § 7 гл. 3 (вып. 8), и рассуждения гл. 5 (вып. 8). Предложите по крайней мере два независимых способа экспериментального определения величины μ .

К главе 6. Гамильтонова матрица

- б. 1. Пучок частиц со спином $1/2$ и магнитным моментом μ проходит через фильтр Штерна — Герлаха, пропускающий лишь частицы в состоянии $|+\rangle$ со спином, направленным вдоль положительного направления оси z . Затем частицы проводят время T в однородном магнитном поле B_0 , параллельном оси x . Покинув это поле, они попадают во второй фильтр Штерна — Герлаха, который пропускает лишь частицы в состоянии $|-\rangle$ (спином вниз) по отношению к оси z . Считайте, что μ и J параллельны.
- а) Каково минимальное значение B_0 , при котором все частицы пройдут через второй фильтр?
 - б) Если частицы находятся в магнитном поле только половину времени, чему равна вероятность того, что они пройдут через второй фильтр?

6. 2. Пучок частиц со спином $1/2$ и магнитным моментом μ проходит через прибор Штерна — Герлаха, пропускающий только частицы в состоянии $|+\rangle$ со спином, направленным вдоль положительного направления оси z . Затем пучок попадает в магнитное поле, направленное под углом 45° к оси z в плоскости $x - z$. Какова вероятность того, что по истечении времени T эти частицы будут обнаружены в состояниях с $J_x = \hbar/2$ или $J_y = \hbar/2$? Векторы μ и $\mathbf{J}$ снова считайте параллельными.
6. 3. В момент времени $t = 0$ спин частицы направлен вдоль оси $+z$ (величина спина $1/2$). Частица помещена внутрь прибора, который задает постоянную амплитуду переворота спина частицы в единицу времени, равную $iA/\hbar$, т. е. $H_{12} = H_{21} = -A$, где A — положительная константа. Кроме того, $H_{11} = H_{22}$ и их можно положить равными нулю.
- а) Чему равна вероятность обнаружить частицу в момент времени T в состоянии $+z$?
 - б) Найдите две линейные комбинации амплитуд состояний $+$ и $-$, которые соответствовали бы стационарным состояниям. Чему равны энергии этих стационарных состояний?
 - в) В любой момент времени T существует направление, вдоль которого спин направлен вверх с вероятностью единица. Найдите это направление.
 - г) Можете ли вы придумать физический прибор для реализации рассмотренного эффекта?

К главе 7. Аммиачный мазер

7. 1. В гл. 7 «Лекций» (вып. 8) рассчитывалась вероятность перевода молекулы аммиака из состояния $|II\rangle$ в состояние $|I\rangle$ при помощи облучения ее радиоволнами с очень короткой длиной волны; состояние $|II\rangle$ имеет меньшую энергию, чем состояние $|I\rangle$, поэтому такой переход соответствует поглощению энергии излучения. Попробуйте развить эти идеи и применить их к вычислению вероятности индуцировать излучение молекулы аммиака. Как относится вероятность излучения к вероятности поглощения? Как эта вероятность связана с коэффициентами Эйнштейна A_{mn} и B_{mn} , которые были определены в вып. 4, стр. 80? Найдите интенсивность спонтанного излучения молекулы аммиака.
7. 2. Протоны с магнитным моментом μ , находящиеся в водном образце, помещены в однородное магнитное поле. Амплитуда поля постоянна, а направление изменяется со вре-

менем (проводится эксперимент по ядерному магнитному резонансу — ЯМР):

$$\begin{aligned} B_x &= B \sin \theta \cos \omega t, \\ B_y &= -B \sin \theta \sin \omega t, \\ B_z &= B \cos \theta. \end{aligned}$$

В начальный момент $t = 0$ спины всех протонов направлены вдоль магнитного поля (находятся в состоянии $+1/2$). Предположим, что θ , полярный угол в сферических координатах, *очень мал*. Каково должно быть значение ω , чтобы наблюдался резонанс? Какова вероятность того, что частица имеет спин, направленный *вниз* в момент времени t , если частота ω имеет резонансное значение?

К главе 8. Другие системы с двумя состояниями

8. 1. Частица со спином $1/2$ помещена в сильное магнитное поле B_0 . В направлении, перпендикулярном B_0 , приложено осциллирующее магнитное поле $2B_n \cos \omega t$, причем $B_n \ll B_0$. Если спин частицы первоначально был ориентирован антипараллельно вектору B_0 , какова вероятность того, что в момент времени T спин будет направлен параллельно этому вектору?

К главе 9. Еще системы с двумя состояниями

9. 1. Покажите, что спиновые матрицы Паули можно рассматривать как компоненты вектора σ , для которого справедливы следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma \times \sigma &= 2i\sigma, \\ \sigma \cdot \sigma &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдите произведение $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$.

9. 2. Молекула двуокиси углерода имеет линейную структуру (ОСО) и с легкостью присоединяет лишний электрон, превращаясь тем самым в отрицательный ион. Предположим, что этот электрон будет иметь энергию E_0 , если присоединится к атому кислорода, и энергию E_c , если к атому углерода. Ни одна из этих энергий, однако, не будет соответствовать стационарному состоянию, поскольку всегда существует небольшая вероятность перехода лишнего электрона с кислорода на углерод и обратно. (Мы

будем считать вероятность того, что электрон «перепрыгнет» непосредственно с одного атома кислорода на другую, пренебрежимо малой.)

- а) Получите значения энергии уровней иона CO_2 , выразив их через E_0 , E_c и еще один параметр.
- б) Дайте физическое описание каждого стационарного состояния для случая, когда значения энергий E_0 и E_c совпадают.

9. 3. В молекуле метана CH_4 атомы водорода располагаются в вершинах тетраэдра, а единственный атом углерода — в центре тетраэдра. В ионе метана не хватает электрона на одной из этих четырех связей, а вместо него остается «дырка», которая может «перескакивать» с одной связи на другую. Это пример системы с четырьмя состояниями. Опираясь на соображения симметрии, сведите к минимуму число различных матричных элементов гамильтониана и предскажите число различных энергетических уровней, которые должны наблюдаться у электронной оболочки иона метана. Колебательным и вращательным взаимодействием атомов пренебрегите. Выразите расстояние между уровнями через минимально возможное число матричных элементов.

9. 4. Рассмотрим шесть атомов, расположенных по окружности на равных расстояниях друг от друга. Добавим лишний электрон и обозначим базисные состояния символами $|1\rangle, |2\rangle, \dots, |6\rangle$, где $|1\rangle$ обозначает, что этот добавочный электрон находится в атоме 1, и т. д. Предположим далее, что этот электрон может перескакивать со «своего» атома лишь на один из двух соседних, но не дальше.

Покажите, что $|I\rangle$ — это стационарное состояние, если амплитуды $C_i = \langle i|I\rangle$ (где $|i\rangle$ — i -е базисное состояние) все равны $(1/\sqrt{6})\exp(-iE_I t/\hbar)$. Найдите E_I . Сколько еще существует стационарных состояний у такой системы?

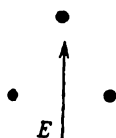
Можно показать, что если ψ — стационарное состояние, то амплитуды $C_i = \langle i|\psi\rangle$ связаны между собой следующим образом (при надлежащем выборе постоянной δ):

$$\begin{aligned} C_2 &= C_1 e^{i\delta}, & C_5 &= C_4 e^{i\delta}, \\ C_3 &= C_2 e^{i\delta}, & C_6 &= C_5 e^{i\delta}, \\ C_4 &= C_3 e^{i\delta}, \end{aligned}$$

Чему равны эти «надлежащим образом» выбранные значения δ ? Постройте диаграмму уровней рассматриваемой системы и найдите расстояния между уровнями.

9. 5. Молекула состоит из трех одинаковых атомов, расположенных в вершинах равностороннего треугольника. В отрицательном ионе такой молекулы есть дополнительный электрон, способный перескакивать с каждого из трех атомов на любой другой.

а) Пусть матричный элемент такого перехода равен $-A$. Рассчитайте расстояния между уровнями молекулярного иона.



- б) Ион помещен в электрическое поле, направление которого совпадает с плоскостью иона, а по отношению к его вершинам поле направлено так, как показано на рисунке. Если напряженность поля такова, что потенциальная энергия электрона, расположенного «в вершине» треугольника, на $\epsilon A = 0,01 A$ больше, чем в двух других вершинах, как изменятся расстояния между уровнями?

К главе 10. Сверхтонкое расщепление в водороде

10. 1. Рассчитайте величины расщеплений уровня атома водорода с $j = 1$, помещенного в межзвездное пространство, где напряженность магнитного поля составляет 10^{-5} гс, на поверхности Земли (примерно 0,5 гс) и в самом сильном магнитном поле, которое можно получить в лабораторных условиях (порядка 100 000 гс). Ответ выразите через частоту и через длину волны.

К главе 11. Распространение в кристаллической решетке

11. 1. Рассмотрим бесконечную цепочку атомов, расположенных друг от друга на равных расстояниях b (координата атома n равна $x = bn$), и предположим, что электрон может находиться в каждом из атомов в двух состояниях i и j с различными энергиями E_i и E_j , т. е. набор базисных состояний можно записать следующим образом:

|электрон на атоме x_n в состоянии i) = $|x_n, i\rangle$,

|электрон на атоме x_n в состоянии j) = $|x_n, j\rangle$.

Предположим далее, что электрон может перескакивать со своего атома на ближайший соседний с амплитудами:

— $\frac{A_{ii}}{i\hbar}$ для перехода с $|x_n, i\rangle$ на $|x_{n+1}, i\rangle$ или $|x_{n-1}, i\rangle$,

— $\frac{A_{jj}}{i\hbar}$ для перехода с $|x_n, j\rangle$ на $|x_{n+1}, j\rangle$ или $|x_{n-1}, j\rangle$,

— $\frac{A_{ji}}{i\hbar}$ для перехода с $|x_n, i\rangle$ на $|x_{n+1}, j\rangle$ или $|x_{n-1}, j\rangle$,

— $\frac{A_{ij}}{i\hbar}$ для перехода с $|x_n, j\rangle$ на $|x_{n+1}, i\rangle$ или $|x_{n-1}, i\rangle$.

Рассмотрим случай, когда $A_{ij} = A_{ji} = B$ и $A_{jj} = A_{ii} = A$. С помощью процедуры, описанной в гл. 11 «Лекций», найдите допустимые значения энергии такой системы. Опишите зонную структуру в предельных случаях $|E_i - E_j| \ll 2B$ и $|E_i - E_j| \gg 2B$. Сравните свой ответ с решением, найденным в гл. 11.

11. 2. Рассмотрим бесконечную цепочку, состоящую из атомов двух типов a и b :

(a) (b) (a) (b) (a) (b) (a) (b) (a)

$n-2$ $n-1$ n $n+1$ $n+2$

Пусть амплитуда обнаружения электрона на n -м атоме типа a будет C_n^a , а на n -м атоме типа b — будет C_n^b . Предположим, что энергия электрона в атоме a равна $E_0 + \Delta E$, а в атоме b равна $E_0 - \Delta E$; допустим еще, что матричный элемент гамильтониана для перехода между ближайшими соседями равен $-A$. Расстояние между атомами равно c . Рассчитайте и приближенно начертите график зависимости энергии стационарного состояния от волнового числа k . (Для каждого заданного значения k получатся два значения энергии.) Какие ограничения следует наложить на значения k , чтобы учесть каждое состояние ровно один раз?

11. 3. Рассмотрим рассеяние на примеси (см. пример, приведенный в гл. 11, вып. 9). Пусть атом под номером $n = 0$ отличается от всех остальных. Положим $H_{00} = E_0$, $H_{01} = H_{10} = H_{0(-1)} = H_{(-1)0} = -B$, где $B \neq A$. Найдите β и γ и убедитесь в том, что $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$.

11. 4. В предыдущей задаче, как и в примере, приведенном в гл. 11 (вып. 9), $\beta = \gamma - 1$. Легко проверить также, что в любом более общем случае, являющемся комбинацией этих двух, равенство $\beta = \gamma - 1$ также справедливо. Следовательно, в общем случае одномерного рассеяния существует «закон сохранения числа частиц»

$$|\beta|^2 + |1 + \beta|^2 = 1.$$

- а) Покажите, что для его выполнения необходимо, чтобы

$$\operatorname{Re} \left(\frac{\beta}{1 + \beta} \right) = 0.$$

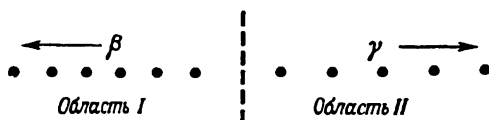
- б) Покажите, что β можно записать следующим образом:

$$\beta = ie^{i\eta} \sin \eta,$$

где η — вещественное число. Величина η называется «сдвигом фазы при рассеянии» и содержит информацию как о фазе, так и об амплитуде рассеянной волны. (Это утверждение в трехмерном случае справедливо так же, как и в одномерном.)

11. 5. Рассмотрим одномерный аналог поверхности раздела, где бесконечный кристалл претерпевает изменение своих свойств. Пусть частица падает слева, как в гл. 11. Пусть в области I значения параметров равны E_0 , $-A$, b , а в области II равны E'_0 , $-A'$, b' . Аналог амплитуд A и A' для атомов, расположенных по обе стороны линии

раздела, обозначим буквой B . Предположим, что A , A' и B — вещественные числа.



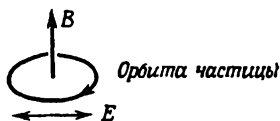
- а) Покажите, что $\gamma = \frac{B}{A'}(1 + \beta)$ в разрыве между атомами $n = 0$ и $n = +1$.
 б) Выразите β через A , A' , B , kb , $k'b'$.
 Покажите, что $|\beta| = 1$ при мнимом ($k'b'$). Каков физический смысл этого результата? При каких значениях $(E - E'_0)$ получается полное отражение?
 в) Проверьте закон сохранения числа частиц, показав, что

$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 \frac{v'_g/b'}{v_g/b} = 1,$$

где v_g и v'_g — групповые скорости в разных областях. Как вы объясните появление множителя при $|\gamma|^2$?

К главе 12. Полупроводники

12. 1. Ниже приведена обычная схема проведения экспериментов по циклотронному резонансу.



$B = B_0$ — статическое магнитное поле, направленное по оси z . Переменное электрическое поле $E = E_0 \cos \omega t$ направлено по оси x .

Частота циклотронного резонанса ω_c определяется по максимуму поглощаемой мощности поля E . Элементарное решение задачи о движении частицы в однородном магнитном поле дает

$$\omega_c = \frac{qB_0}{m^*},$$

где m^* — эффективная масса. Предположим, что эффективная масса не зависит от направления, по которому движется частица.

Уравнение движения электрона (или дырки) в полупроводнике имеет вид

$$m^* \left(\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} \right) = q(E + (v \times B)),$$

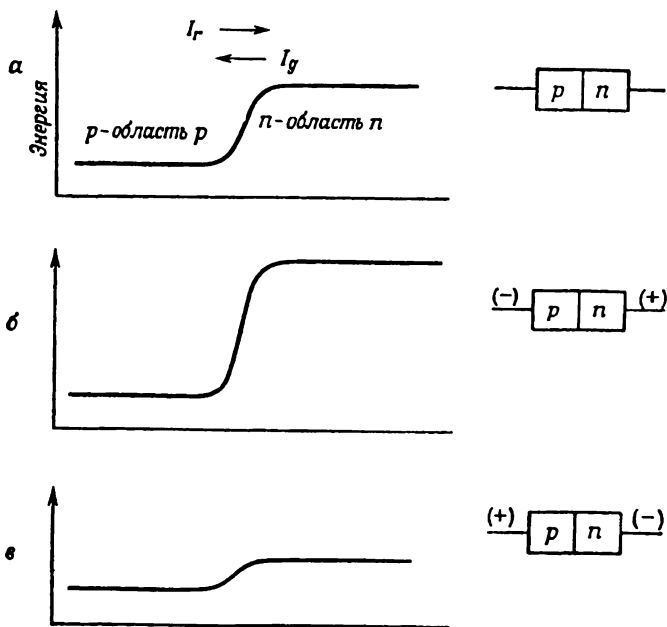
где τ — среднее время между столкновениями (см. «Лекции», вып. 7, гл. 32).

Пусть $v_x = v_0 e^{i\omega t}$, а $E_x = E_0 e^{i\omega t}$. Покажите, что

$$\frac{v_x}{E_x} = \frac{q\tau}{m^*} \left[\frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau} \right].$$

Поглощаемая мощность пропорциональна $\text{Re}[v_x/E_x]$. Почему? Как получить сразу обе величины τ и m^* из данных по циклотронному резонансу? Обратите внимание на то, что для наблюдения резонанса необходимо, чтобы $\omega_c\tau > 1$. Что это означает физически?

12. 2. На рисунке представлена типичная энергетическая диаграмма для дырок в p — n -переходе (например, в полупроводниковом диоде) в отсутствие внешнего напряжения. В равновесном состоянии в этом случае имеется ток «тепловых дырок» I_g . Эти дырки диффундируют из области n в область p , и «ток рождения» в точности равен «току рекомбинации дырок» I_r , который течет из



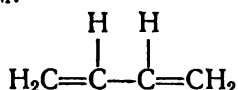
области p в область n . Если приложить «обратное напряжение» или «прямое напряжение» к $p-n$ -переходу, то энергетическая диаграмма изменится (см. фиг. б и в). Рассмотрите эти три случая и покажите, что выражение для результирующего дырочного тока имеет вид

$$I \text{ (дырка)} = I_g (e^{qV/kT} - 1).$$

А какое выражение получится для полного тока? (V — напряжение, приложенное к $p-n$ -переходу.)

К главе 13. Приближение независимых частиц

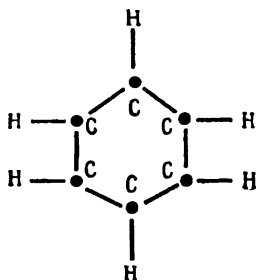
13. 1. Структуру молекулы бутадиена можно изобразить следующим образом:



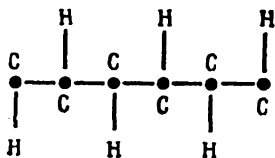
Мысленно удалим четыре электрона, осуществляющие двойные связи, а затем будем добавлять их по одному. Такую задачу можно рассматривать с помощью модели независимых частиц.

В частности, эту систему можно рассматривать как совокупность четырех потенциальных ям с энергиями E_0 и матричными элементами гамильтониана $-A$. Чему равна длина волны излучения, испускаемого молекулами бутадиена при переходе с первого возбужденного уровня на основной? Считайте, что $A = 1$ эв. В однократно ионизованной молекуле бутадиена имеется только три электрона из двойных связей. Что вы можете сказать о распределении этих электронов в молекуле?

13. 2. Нужно оценить энергию, необходимую для разрыва бензольного кольца, и рассчитать разность энергий двух конфигураций, показанных на рисунке. Используйте для этой



а



б

оценки метод молекулярных орбиталей в приближении независимых частиц. Ответ выразите в эв на молекулу, используя тот факт, что при переходе с первого возбужденного состояния на основное молекулы бензола испускают излучение с длиной волны 2000 Å.

13. 3. К ферромагнитному веществу при очень низких температурах применимы те рассуждения о спиновых волнах, которые приведены в гл. 13 «Лекций» (вып. 9). В частности, для любого состояния K с энергией $E_K \approx K^2 b^2 A$ существует определенная вероятность (ее можно найти из термодинамических соображений) обнаружить несколько атомов в состояниях «спином вниз», если при нулевой температуре все атомы находились в состояниях «спином вверх». Покажите, что среднее число атомов со спинами, направленными вниз, пропорционально $1/(e^{E_K/kT} - 1)$. Если распространить эти рассуждения на трехмерный случай, то $E_K \approx Ab^2(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)$ и полное число атомов «спином вниз» в единице объема определяется выражением

$$\frac{\text{Число атомов спином вниз}}{\text{Объем}} = \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{E_K/kT} - 1}.$$

Докажите это. В пределе при $T \rightarrow 0$ намагниченность выходит на насыщение и принимает значение $M_{\text{насыщ}}$. Покажите, что при низких температурах справедлив закон

$$\frac{M}{M_{\text{насыщ}}} = 1 - \text{const } T^{3/2} = 1 - 2 \left(\frac{kT}{4\pi A} \right)^{3/2} \left[\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} \right].$$

Вычислите интеграл, разложив подынтегральное выражение в ряд.

К главе 14. Зависимость амплитуд от места

14. 1. Рассмотрим одномерное движение частицы с массой m в прямоугольной потенциальной яме. Для простоты предположим, что $V_0 \rightarrow \infty$.

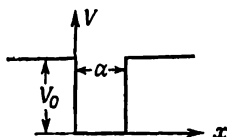
а) В стационарном состоянии с наименьшей энергией E_0 : $\psi_0(x, t) = u_0(x) e^{-iE_0 t/\hbar}$.

Мы должны считать, что $u_0(x) = 0$ во всех точках вне ямы (т. е. уже при $x = -\varepsilon$ или $x = a + \varepsilon$). Почему?

- б) Решите уравнение Шредингера внутри ямы, используя граничное условие, приведенное в пункте (а).

Найдите E_0 и изобразите зависимость $u_0(x)$. Нормировать $u_0(x)$ не нужно.

- в) Найдите разность энергий первого возбужденного и основного состояний.



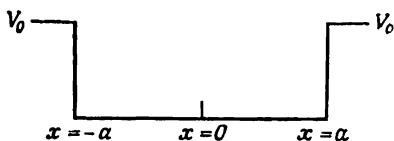
- г) Для самого нижнего состояния изобразите грубо вероятность обнаружить у частицы значение импульса в интервале от p до $p + dp$. Точного интегрирования не требуется, о нормировке тоже не беспокойтесь. Но масштаб по оси импульсов укажите.

14. 2. Рассмотрим движение частицы с массой m в одномерной потенциальной яме, которая изображена на фиг. 1.



Фиг. 1.

- а) Найдите такое значение V_0 , при котором энергия частицы в основном состоянии отличается на 10% от энергии основного состояния при $V_0 \rightarrow \infty$.



- б) Пусть V_0 — значение, найденное в пункте (а). Не пускаясь в длинные вычисления, найдите энергию первого возбужденного состояния в яме, изображенной на фиг. 2 и определяемой следующими условиями:

Фиг. 2.

б) Пусть V_0 — значение, найденное в пункте (а). Не пускаясь в длинные вычисления, найдите энергию первого возбужденного состояния в яме, изображенной на фиг. 2 и определяемой следующими условиями:

$$\begin{aligned} V &= V_0, & x < -a, \\ V &= 0, & -a < x < +a, \\ V &= V_0, & x > a. \end{aligned}$$

14. 3. Рассмотрим следующую одномерную задачу. Частица массы m находится в прямоугольной потенциальной яме:

$$\begin{aligned} V &= V_0, & |x| > a, \\ V &= 0, & |x| < a. \end{aligned}$$

Ниже приведены два равенства. Покажите, что их можно получить, потребовав, чтобы волновые функции, являющиеся решениями уравнения Шредингера, удовлетворяли необходимым граничным условиям. Речь идет о таких равенствах:

$$\alpha \operatorname{ctg} \alpha a = -\beta$$

или

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha a = +\beta,$$

где

$$\alpha = \left(\frac{2mE}{\hbar^2} \right)^{1/2}, \quad \beta = + \left[\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \right]^{1/2}.$$

Если $V_0 a^2 = 4\hbar^2/2m$, оцените значения энергии основного и первого возбужденного состояний. Нанесите на график волновые функции этих состояний. Сколько всего существует связанных состояний, если $V_0 a^2 < (\pi^2 \hbar^2/8m)$?

14. 4. В гл. 14 «Лекций» (вып. 9) был найден разброс по импульсам для случая, когда волновая функция имеет гауссову форму. В общем случае, однако, пространственная протяженность волнового пакета не останется постоянной, а будет увеличиваться:

$$\varphi(x, t) = K e^{-|a(t)x^2 + c(t)|}.$$

Используя уравнение Шредингера, покажите, что для свободной частицы

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m} t.$$

Чему равно $c(t)$? Если волновая функция описывает электрон, первоначально находившийся внутри области шириной 1 Å, то какова будет ширина этой «области локализации» через 1 сек? Преобразуем волновую функцию в импульсное представление, т. е. найдем всроятность обнаружения частицы с заданным значением импульса p . Как изменяется со временем ширина распределения вероятностей для импульсов? Покажите, что найденный таким образом «разброс по импульсам» согласуется с «разбросом по скоростям», который можно непосредственно получить из временной зависимости координатной волновой функции.

К главе 16. Момент количества движения

16. 1. Некоторое возбужденное состояние атома имеет спин 1 и может «разрядиться», испустив фотон и перейдя в состояние со спином, равным нулю. Рассмотрим

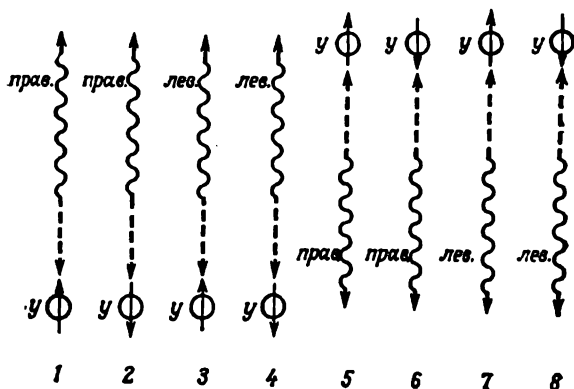
возбужденный атом, у которого проекция момента на ось z равна нулю. Пусть $A(\theta)$ — амплитуда испускания фотона с правой круговой поляризацией в малый интервал телесных углов $\Delta\Omega$ в направлении, образующем с осью z угол θ . Как $A(\theta)$ зависит от θ ?

16. 2. Частица X , имеющая спин $1/2$, распадается по схеме

$$X \rightarrow Y + \gamma,$$

где частица Y имеет спин $1/2$ и положительную четность. Если спин частицы X направлен вдоль оси z , то продукты распада, движущиеся вдоль оси z , могут получаться в восьми состояниях, представленных на рисунке. Волнистая и штрихованная линии со стрелками указывают соответственно направление движения фотона и частицы Y , а стрелка у Y — направление спина этой частицы.

- Какие амплитуды конечных состояний обязательно равны нулю?
- Рассчитайте угловое распределение частиц Y , поляризованных вдоль направления своего движения, если распадающиеся частицы X поляризованы вдоль оси z .
- Рассчитайте угловое распределение всех частиц Y независимо от их поляризации.
- Тщательные эксперименты не обнаружили в этом распаде каких-либо отклонений от изотропного углового распределения. Какой физической причиной это можно объяснить?



16. 3. На синхротроне исследуется реакция

$$\gamma + p \rightarrow p^* \rightarrow p + \pi^0.$$

Значком p^* обозначено возбужденное состояние протона, которое распадается на протон и π^0 -мезон. Известно, что в определенном интервале энергий фотона состояние p^* имеет полный момент $3/2$.

Предположим, что пучок фотонов, обладающих правой круговой поляризацией и энергией, лежащей в упомянутом интервале, падает вдоль оси z на мишень, состоящую из неполяризованных протонов. Угловое распределение этой реакции можно анализировать, рассуждая следующим образом. Фотон и протон образуют p^* в состоянии $|j = 3/2, m = +1/2\rangle$ с амплитудой a и в состоянии $|3/2, +3/2\rangle$ — с амплитудой b . Возбужденное состояние распадается на π^0 -мезон с нулевым спином и протон, движущиеся в противоположных направлениях. Пусть f — амплитуда вылета протона вдоль оси z со спином, направленным вверх, а g — со спином, направленным вниз. Объясните, почему для состояния p^* разрешенными являются только значения $m = +3/2$ и $m = +1/2$, а для конечного состояния — только значения $m' = +1/2$ и $m' = -1/2$ (m' обозначает проекцию на направление испускания). Выразите угловое распределение π^0 -мезонов через a , b и θ . Полагайте $f = g$.

16. 4. Рассмотрим упругое рассеяние π^+ -мезонов на неполяризованной протонной мишени. Мезоны имеют спин 0; четность сохраняется. Предполагается, что в рассеянии доминирует процесс, при котором протон переходит в возбужденное состояние с $j = 3/2$, поглощая мезон. (Момент $j = 3/2$ получается за счет сложения спина протона и орбитального момента.) Затем мезон испускается снова, а протон переходит в основное состояние. Покажите, что из такого предположения следует угловое распределение рассеянных мезонов, пропорциональное $(1 + 3 \cos^2 \theta)$.

16. 5. Основное состояние атома имеет спин, равный нулю, и положительную четность. Спин первого возбужденного состояния равен единице, а четность неизвестна. Пусть некоторое количество атомов находится в первом возбужденном состоянии, и все они имеют проекцию момента $m = 1$ на ось z . Рассмотрим фотоны, которые испускаются этими атомами при переходе в основное состояние.

- а) Можно ли определить четность возбужденного состояния, если измерять угловое распределение испускаемых фотонов, не обращая внимания на их поляризацию?
- б) Покажите, что эту неизвестную четность можно определить, измеряя угловые распределения фотонов, поляризованных вдоль направлений x' и y' . (Ось z' выбирается в направлении движения фотона и располагается в плоскости $x - z$.)

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

ЭЛЕКТРИЧЕСТВО И МАГНЕТИЗМ

К главе 1. Электромагнетизм

- 1.1. а) Силы гравитационного притяжения и электрического отталкивания одинаково зависят от расстояния r между протонами. Условие равенства этих сил записывается в виде

$$Gm^2 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0},$$

где $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{сек}^2$ — гравитационная постоянная, $q_e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ кулон}$ — заряд электрона. Отсюда $m = q_e / \sqrt{4\pi\epsilon_0 G} = 1,86 \cdot 10^{-9} \text{ кг}$ и $m/m_p = 1,1 \cdot 10^{18}$ ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$).

- б) Если Z — атомный номер ядра, $n = 9,41 \cdot 10^{21} \text{ м}^{-3}$ — число атомов в 1 г меди (полагая копейку медной), то искомая сила равна $F = 10^{-4} n^2 Z^2 q_e^2 / 4\pi\epsilon_0 r^2$, где r — расстояние между копейками. Подставляя численные значения, находим $F = 1,7 \cdot 10^{13} \text{ ньютон}$. Тело такого веса напоминало бы, скажем, гору высотой 700 м и диаметром основания около 1,5 км.

- 1.2. Радиусы тяжелых атомных ядер хорошо описываются формулой $R = R_0 A^{1/3}$, где $R_0 = 1,25 \cdot 10^{-15} \text{ м}$, A — атомный вес. Оценим приближенно требуемую работу как энергию электростатического отталкивания двух соприкасающихся равномерно заряженных шаров-ядер с атомным весом A и атомным номером Z . Эта энергия примерно равна энергии электростатического взаимодействия двух точечных зарядов Zq_e , расположенных на расстоянии $2R$:

$$E = \frac{(Zq_e)^2}{8\pi\epsilon_0 R_0 A^{1/3}}.$$

Следовательно, работа, которую необходимо затратить на преодоление электростатического отталкивания при образовании ядра урана U^{238} из двух одинаковых половинок (ядер с $A = 119$ и $Z = 46$), приблизительно равна $E_U = 4 \cdot 10^{-11} \text{ дж} = 250 \text{ Мэв}$ ($2,8 \cdot 10^7 \text{ кэв} \cdot \text{ч/кг}$). Для двух ядер дейтерия ($A = 2$, $Z = 1$), сливающихся в ядро гелия, $E_{He} = 7,6 \cdot 10^{-14} \text{ дж} = 0,47 \text{ Мэв}$ ($3,1 \cdot 10^8 \text{ кэв} \cdot \text{ч/кг}$). Однако последний результат менее точен, поскольку использованное выше выражение для радиуса ядра является неверным для самых легких ядер. Более точную оценку работы сил электростатического отталкивания можно получить, вычислив электростатические энергии ядра и его половинок в предположении о том, что ядра являются равномерно заряженными шарами. Читателю предлагается вычислить эти энергии в задаче 8.1 к гл. 8 вып. 5 (см. решение задачи 8.1). Однако результат более точной оценки отличается лишь множителем порядка

единицы от полученного в данной задаче. Работа при этом равна разности электростатических энергий ядра и удвоенной энергии ядра-половинки.

- 1.3. Искомую скорость через концентрацию электронов n , площадь поперечного сечения проволоки S и заряд электрона q , можно выразить следующим образом: $v = I/nqS$. Если считать, что концентрация электронов в меди совпадает с числом атомов в единице объема ($A = 64$, $\rho = 8960 \text{ кг/м}^3$), то $v = 0,42 \text{ м/с}$. Отсюда $v^2/c^2 = 2 \cdot 10^{-20}$.
- 1.4. Движение можно считать нерелятивистским. Это следует из того, что, несмотря на относительно большое значение отношения $v/c = 1/3$, величина

$$\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 0,95$$

близка к единице. Это оправдывает принятое приближение. Уравнение движения частицы

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{E} + q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

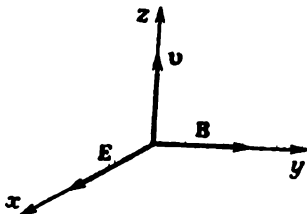
запишем в компонентной форме:

$$m\dot{v}_x = qE_x - qv_zB, \quad m\dot{v}_y = 0, \quad m\dot{v}_z = qv_xB.$$

По условию задачи движение частицы происходит только вдоль оси z . Следовательно, $v_x = 0$ и $qE_x = qv_zB$. Отсюда следует, что

$$B = \frac{E_x}{v_z} = \frac{3E_x}{c} = 10^{-2} \text{ вебер/м}^2.$$

Заряд частицы и ее масса не входят в последнее выражение. Поэтому, в частности, знак заряда частицы из данного эксперимента установить невозможно.



- 1.5. а) Введя обозначение $\omega = qB_0/m$, запишем уравнение движения $m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ в компонентной форме:

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0.$$

Из первого и второго уравнений следует, что $v_x - \omega y = \text{const}$ и $v_y + \omega x = \text{const}$. Используя начальные условия

$$v_x|_{t=0} = v_0, \quad v_y|_{t=0} = 0, \quad y|_{t=0} = 0, \quad x|_{t=0} = 0,$$

находим $v_x = \omega y + v_0$ и $v_y = -\omega x$. Подставляя последнее соотношение в уравнение движения вдоль оси x , получаем

$$\frac{d^2}{dt^2} x = -\omega^2 x.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

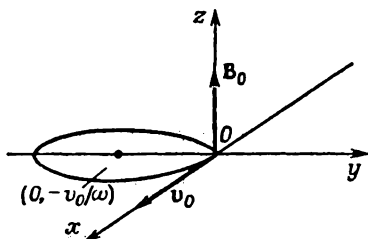
$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t,$$

где A и B — произвольные постоянные. Удовлетворяя начальным условиям, находим $A = v_0/\omega$ и $B = 0$. Полученное выражение для x дифференцируем по времени и находим y из соотношения $y = (v_x - v_0)/\omega$. Окончательное решение задачи записывается в виде

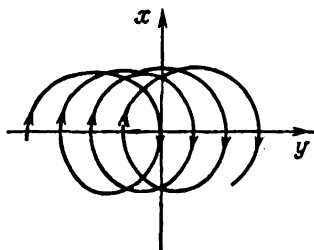
$$x = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad y = \frac{v_0}{\omega} (\cos \omega t - 1), \quad z = 0.$$

Частица движется по окружности радиусом v_0 (фиг. 1) в плоскости xy , центр которой расположен в точке $(0, -v_0/\omega)$. Частота оборотов частицы вокруг центра равна $\omega = qB/m$.

- б) В магнитном поле $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = B_0 + ax$ частица начнет вначале двигаться по примерно круговой орбите радиусом $r = mv_0/qB_0$. Однако в области более сильного поля радиус кривизны траектории будет несколько меньше. При этом орбита уже не будет замкнутой окружностью, а возникнет дрейф вдоль оси y , как показано на фиг. 2.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

- в) Магнитное поле $B_x = 0$, $B_y = 0$, $B_z = B_0 + ax$ несовместимо с тем уравнением Максвелла, согласно которому циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по замкнутому контуру в отсутствие электрического поля и токов (в данной задаче $\mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{j} = 0$) должна равняться нулю. Действительно, рассмотрим в плоскости xy замкнутый контур C в форме прямоугольной рамки со сторонами l и L и вычислим циркуляцию $\mathbf{B}$ вдоль этого контура. Несложные вычисления приводят к выражению $\oint_C \mathbf{B} d\mathbf{l} = -a \cdot L \cdot l \neq 0$, что противоречит упомянутому уравнению Максвелла.

- 1.6. а) Частица движется по окружности радиусом a вокруг заряда Q , если сумма силы электростатического притяжения и силы Лоренца равна массе частицы, умноженной на центростремительное ускорение. Поскольку в нашем случае сила Лоренца направлена к началу координат, имеем

$$\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0 a^2} + qv_0 B_0 = \frac{mv_0^2}{a},$$

т. е.

$$B_0 = \frac{1}{a^2 q v_0} \left(-\frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} + mv_0^2 a \right).$$

- б) Сила, с которой магнитное поле действует на частицу, всегда перпендикулярна ее скорости. Поэтому магнитное поле не произво-

дит работы над движущимся зарядом, и закон сохранения энергии имеет вид

$$\frac{mv^2}{2} = E - U(r),$$

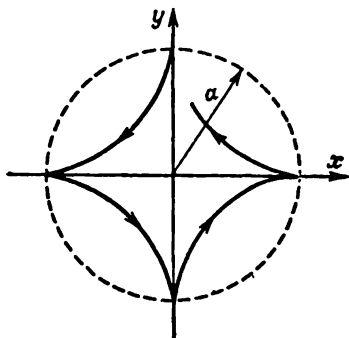
где E — полная энергия частицы, $U(r)$ — энергия электростатического взаимодействия. Отсюда видно, что скорость частицы является функцией только расстояния:

$$v(r) = \sqrt{\frac{2}{m} \left(E + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r} \right)}.$$

- в) В этом случае полная энергия заряда q равна $E = -Qq/4\pi\epsilon_0 a$ и, следовательно,

$$v(r) = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 m} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)}.$$

Начав в начальный момент «падать» на заряд $-Q$, частица q отклоняется полем так, как показано на рисунке. Из выражения для $v(r)$ мы видим, что в точках окружности $r = a$ скорость частицы обращается в нуль и вновь повторяется исходная ситуация.



К главе 2. Дифференциальное исчисление векторных полей

- 2.1. а) Условия задачи таковы, что полный поток тепла J через поверхность цилиндра произвольного радиуса $a \leq r \leq b$, коаксиального проволоке, является постоянной величиной. В данной задаче вектор потока тепла $\mathbf{h}$ направлен по радиусу цилиндра; следовательно, для цилиндра единичной длины и радиусом r ($a \leq r \leq b$) можно написать соотношение

$$J = h \cdot 2\pi r = \text{const.}$$

Если теперь использовать векторное уравнение потока тепла $\mathbf{h} = -\kappa \nabla T$ и учесть, что векторы $\mathbf{h}$ и ∇T направлены по радиусу цилиндра, то можно написать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{J}{2\pi r} = -\kappa \frac{dT}{dr}.$$

Интегрируя это уравнение, находим

$$T(r) = -\frac{J}{2\pi\kappa} \ln r + D, \quad (1)$$

где D — постоянная интегрирования. Величины J и D определим из граничных условий: $T = T_1$ при $r = a$ и $T = T_2$ при $r = b$. Следовательно,

$$T(r) = \frac{T_1 - T_2}{\ln(a/b)} \ln \frac{r}{b} + T_2.$$

Искомый градиент температуры в изоляционном покрытии дается выражением

$$(\nabla T)_r = \frac{T_1 - T_2}{\ln(a/b)} \frac{1}{r}.$$

- б) Здесь граничные условия другие, чем в п. (а), т. е. задано Q — количество тепла, выделяемое током на единице длины медного провода в единицу времени. В стационарных условиях это количество тепла равно полному потоку тепла J через поверхность провода. Если ρ — удельное сопротивление, то, согласно закону Ома,

$$Q = \frac{I^2 \rho}{\pi a^2} = -\kappa \frac{dT}{dr} \Big|_{r=a} 2\pi a = J,$$

где I — сила тока, протекающего по проводу. Из этого соотношения находим новое граничное условие

$$\frac{dT}{dr} \Big|_{r=a} = -\frac{I^2 \rho}{\kappa 2\pi a^2}.$$

Используя это граничное условие и выражение (1), находим

$$D = T_2 + \frac{J}{2\pi\kappa} \ln b.$$

Следовательно,

$$T(r) = T_2 - \frac{I^2 \rho}{\kappa 2\pi^2 a^2} \ln \frac{r}{b}.$$

Отсюда ($a = 0,001$ м, $b = 0,003$ м, $\rho = 1,7 \cdot 10^{-8}$ ом·м, $\kappa = 0,16$ вт/м·К)

$$T_1 - T_2 = \frac{I^2 \rho}{2\pi^2 a^2 \kappa} \ln \frac{b}{a} = 2,4 \text{ К}.$$

- 2.2. а) Как показано в «Лекциях» [см. § 5 гл. 2, вып. 5, формулы (2.38)–(2.40)], компоненты ротора вектора $\mathbf{A}$ можно записать в виде

$$(\nabla \times \mathbf{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$(\nabla \times \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Дивергенция ротора по определению равна величине

$$\frac{\partial}{\partial x} (\nabla \times \mathbf{A})_x + \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{A})_y + \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{A})_z.$$

Подставляя в это выражение компоненты ротора $\mathbf{A}$ и учитывая тот факт, что порядок вычисления смешанных частных про-

изводных произволен, т. е. что, например, $\partial^2 A_x / \partial z \partial y = \partial^2 A_x / \partial y \partial z$, легко убеждаемся в равенстве нулю дивергенции ротора произвольного вектора $\mathbf{A}$.

- б) Доказательство удобно провести для каждой компоненты в отдельности. Покажем, например, что

$$(\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}))_x = \nabla_x (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 A_x. \quad (1)$$

Согласно определению, левая часть этого соотношения может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} (\nabla \times \mathbf{A})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\nabla \times \mathbf{A})_y = \\ = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \right). \end{aligned}$$

Прибавляя и вычитая в правой части последнего соотношения величину $\partial^2 A_x / \partial x^2$ и учитывая, что $\partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y + \partial A_z / \partial z = \nabla \cdot \mathbf{A}$, убеждаемся в справедливости соотношения (1). Аналогично доказывается это соотношение для компонент y и z .

- 2.3. а) Поскольку $R_x = x$, $R_y = y$, $R_z = z$, то

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3.$$

$$\text{б)} \quad (\nabla \times \mathbf{R})_x = \frac{\partial R_z}{\partial y} - \frac{\partial R_y}{\partial z} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{R})_y = \frac{\partial R_x}{\partial z} - \frac{\partial R_z}{\partial x} = 0,$$

$$(\nabla \times \mathbf{R})_z = \frac{\partial R_y}{\partial x} - \frac{\partial R_x}{\partial y} = 0.$$

- в) Нетрудно убедиться, что если φ — произвольная скалярная функция, а $\mathbf{A}$ — произвольный вектор, то в любом случае

$$\nabla \cdot \varphi \mathbf{A} = (\nabla \varphi \cdot \mathbf{A}) + \varphi (\nabla \cdot \mathbf{A}).$$

Это соотношение полезно запомнить. Из него, в частности, следует и требуемое в условии соотношение. Действительно, выбирая в качестве $\varphi = 1/R^3$ и $\mathbf{A} = \mathbf{R}$, а также учитывая, что в соответствии с п. (а) $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$ и $\nabla \varphi = -3\mathbf{R}/R^5$, имеем

$$\nabla \cdot \frac{\mathbf{R}}{R^3} = -3 \frac{(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R})}{R^5} + \frac{3}{R^3} = 0.$$

Вычисление градиента скалярной функции, зависящей только от модуля радиуса-вектора, довольно часто встречается на практике. Поэтому полезно запомнить просто доказываемое соотношение ($R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$):

$$\nabla \varphi(\mathbf{R}) = \frac{\partial \varphi}{\partial R} \frac{\mathbf{R}}{R}. \quad (1)$$

- г) Искомое соотношение можно получить вычислением в «лоб». Однако в силу того, что вычисление ротора — одна из распространенных операций в физике, полезно доказать вначале гораздо более общее соотношение:

$$\nabla \times \varphi \mathbf{A} = \nabla \varphi \times \mathbf{A} + \varphi (\nabla \times \mathbf{A}),$$

внешне очень похожее на соотношение для $\nabla \cdot \varphi \mathbf{A}$, приведенное в п. (в). В том, что оно справедливо, можно убедиться непосредственной проверкой. Искомое соотношение следует из вышеприведенного лишь как частный случай. Действительно, выбирая $\varphi = -1/R^3$ и $\mathbf{A} = \mathbf{R}$, учитывая (1) и тот факт, что $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{R} = 0$ [см. п. (б) настоящей задачи], находим

$$\nabla \times \left(-\frac{\mathbf{R}}{R^3} \right) = 0.$$

- д) Результат этого пункта задачи следует как частный случай из соотношения (1).

е) $\varphi = R^2/2$.

- 2.4 а) Если вычислить дивергенцию левой части уравнения (2), то в соответствии с п. (а) задачи 2.2 дивергенция ротора всегда равна нулю. Совместность уравнений (2) и (3) следует из того, что, как следует из уравнения (3), правая часть получающегося при этом соотношения также обращается в нуль.
- б) Вычислим дивергенцию левой и правой частей уравнения (4). Согласно п. (а) задачи 2.2, в левой части получим нуль и, следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{1}{\varepsilon_0} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0.$$

С другой стороны, из уравнения (1) имеем $\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho/\varepsilon_0$. Отсюда видно, что из уравнения (4) действительно следует уравнение (5).

- в) Возьмем ротор от левой и правой частей уравнения (2). Воспользовавшись соотношением, приведенным в п. (б) задачи 2.2, и уравнением Максвелла (4), получим

$$\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.$$

Если теперь использовать уравнение (1), то получим искомое волновое уравнение.

- г) Если аналогичные выкладки проделать, исходя из уравнения (4), то получим искомое волновое уравнение для $\mathbf{B}$.
- д) В силу уравнения (3) вектор $\mathbf{B}$ всегда может быть представлен как ротор некоторого вектора $\mathbf{A}$ (называемого векторным потенциалом), так как дивергенция ротора равна тождественно нулю. Тогда из уравнения (2) получаем

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0.$$

Из этого уравнения видно, что ротор вектора $\mathbf{E} + (\partial \mathbf{A}/\partial t)$ тождественно обращается в нуль. Это означает, что этот вектор можно записать в виде градиента скалярной функции φ (скалярный потенциал электромагнитного поля), поскольку ротор градиента произвольной скалярной функции φ тождественно обращается в нуль:

$$\nabla \times \nabla \varphi = 0.$$

В выполнении последнего соотношения нетрудно убедиться непосредственным вычислением. Но и без этого очевидно, что векторное произведение вектора ∇ на самого себя, каковым и является левая часть этого соотношения, всегда равно нулю.

- 2.5. Поместим начало координат в какую-либо точку на оси вращения тела. Пусть $\mathbf{R}$ — радиус-вектор, определяющий положение произвольной точки вращающегося тела в произвольный момент времени. Очевидно, скорость этой точки тела в тот же момент времени можно представить в виде

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R},$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

- а) Используя свойство смешанного скалярно-векторного произведения, согласно которому векторы в нем можно циклически переставлять, находим

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = -\boldsymbol{\omega} \cdot (\nabla \times \mathbf{R}).$$

Если теперь использовать соотношения, приведенные в п. (б) задачи 2.3, то получим требуемый результат.

- б) Вычислим компоненты вектора $\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})$, направив ось z вдоль вектора $\boldsymbol{\omega}$. Так как $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})_x = -y\omega$, $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})_y = x\omega$, $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})_z = 0$, то

$$(\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}))_x = 0,$$

$$(\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}))_y = 0,$$

$$(\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}))_z = 2\omega.$$

Следовательно, в любой системе координат

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}) = 2\boldsymbol{\omega}.$$

- 2.6. При операциях с вектором ∇ следует всегда помнить, что он действует на переменные векторы, стоящие после него. Иными словами, в выражении $(\nabla \cdot \mathbf{A})\mathbf{R}$ в соответствии с правилами дифференцирования мы должны подействовать оператором ∇ как на вектор $\mathbf{A}$ (считая постоянным $\mathbf{R}$), так и на вектор $\mathbf{R}$ (считая постоянным $\mathbf{A}$). В первом случае получаем нуль, т.е. $\mathbf{R} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{A}) = 0$, а во втором $(\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{R} = \mathbf{A}$.

- 2.7. Дивергенция $\nabla \cdot \mathbf{h} = \partial h_x / \partial x = -\kappa (d^2 T / dx^2)$ максимальна в точке B , поскольку в этой точке кривизна больше, чем в точке E , и отрицательна. В точке D кривизна хоть и большая, но положительна, и поэтому $\nabla \cdot \mathbf{h} < 0$. Во всех точках $\nabla \times \mathbf{h} = 0$.

К главе 3. Интегральное исчисление векторов

- 3.1. а) Как показано в «Лекциях» (см. § 5 гл. 4, вып. 5, стр. 83), первый закон электромагнетизма позволяет найти поток электрического поля: поток напряженности через любую замкнутую поверхность равен заряду внутри нее, деленному на постоянную ϵ_0 . Обозначая плотность зарядов в пространстве через ρ , запишем этот закон в виде

$$\oint \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, da = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho \, dV.$$

Используя теперь теорему Гаусса, напомним

$$\int \nabla \cdot \mathbf{E} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho dV.$$

Это равенство справедливо для произвольной замкнутой поверхности. Следовательно, $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$.

Второй закон электромагнетизма гласит: циркуляция вектора $\mathbf{E}$ по любому замкнутому контуру равна производной по времени от потока вектора $\mathbf{B}$ сквозь произвольную поверхность, опирающуюся на этот контур, т. е.

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{d}{dt} \int \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da.$$

Используя теорему Стокса, запишем

$$\int \left[\nabla \times \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right] \cdot \mathbf{n} da = 0;$$

отсюда

$$\nabla \times \mathbf{E} = \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}.$$

Так как, согласно третьему закону электромагнетизма, поток вектора $\mathbf{B}$ через любую замкнутую поверхность равен нулю, то в соответствии с теоремой Гаусса $\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{B} dV = 0$.

Отсюда следует, что $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Наконец, используя четвертый закон электромагнетизма, циркуляцию вектора $\mathbf{B}$ по контуру можно записать в виде

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da.$$

В соответствии с теоремой Стокса имеем

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \mathbf{j}.$$

- б) Выберем произвольный объем и проинтегрируем по этому объему левую и правую части уравнения $\nabla \cdot \mathbf{j} = -\partial \rho / \partial t$:

$$\int \nabla \cdot \mathbf{j} dV = - \frac{d}{dt} \int \rho dV.$$

Если воспользоваться теперь теоремой Гаусса, то это уравнение можно написать в виде

$$\frac{d}{dt} \int \rho dV = - \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой скорость изменения заряда внутри объема, а правая — количество заряда, вытекающего (втекающего) в единицу времени из объема. Следовательно, равенство этих частей выражает закон сохранения заряда: сколько зарядов убыло в объеме, столько их и вытекло из этого объема.

- 3.2. Не создает. Действительно, окружим шар сферической поверхностью произвольного радиуса R и выберем на этой поверхности произвольный замкнутый контур так, что ограниченная им площадь поверхности сферы равна S . Согласно четвертому закону электромагнетизма, циркуляция вектора $\mathbf{B}$ по контуру может быть представлена в виде [см. решение задачи 3.1]

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{c^2} \frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{c^2 \epsilon_0} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da.$$

Токи и электрическое поле, создаваемое увеличивающимся во времени зарядом шара, являются радиальными. Поэтому написанные выше потоки векторов $\mathbf{j}$ и $\mathbf{E}$ через поверхность S составляют лишь долю от потока этих векторов через замкнутую поверхность сферы, равную $S/4\pi R^2$. Но, согласно закону Гаусса и закону сохранения заряда,

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = \frac{d}{dt} \frac{q(t)}{\epsilon_0} = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_S \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da.$$

Величина $q(t)$ в этом соотношении обозначает заряд шара в момент времени t . Следовательно,

$$\frac{d}{dt} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da + \frac{1}{\epsilon_0} \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} da = 0$$

и

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Так как контур был выбран произвольным, можно сделать вывод о том, что касательная к сфере составляющая вектора $\mathbf{B}$ равна нулю. Равенство нулю радиальной составляющей вектора $\mathbf{B}$ обусловлено тем, что поток вектора $\mathbf{B}$ через поверхность сферы должен быть равен нулю, а также тем, что в силу сферической геометрии системы радиальная составляющая B_r одна и та же во всех точках сферы.

- 3.3. а) $4\pi K$.

б) Если формально воспользоваться теоремой Гаусса, то в силу равенства $\nabla \cdot (K/r^3)\mathbf{r} = 0$ [см. п. (в) задачи 2.3] поток вектора $\mathbf{E}$ через сферическую поверхность оказывается равным нулю, что противоречит результату, полученному в п. (а) нашей задачи. Это противоречие лишь кажущееся, поскольку $\nabla \cdot K(\mathbf{r}/r^3) = 0$ только для $\mathbf{r} \neq 0$. В точке $\mathbf{r} = 0$ $\nabla \cdot \mathbf{E}$ обращается в бесконечность, и применение теоремы Гаусса требует осторожности. Правильнее в этом случае было бы поступить так: в качестве объема интегрирования нужно выбрать объем, заключенный между двумя концентрическими сферическими поверхностями вокруг точечного заряда: одна из них имеет произвольный радиус r , а другая — бесконечно малый радиус. В таком объеме нет зарядов, и применение теоремы Гаусса дает правильный результат. При этом поток вектора $\mathbf{E}$ через сферическую поверхность радиусом r оказывается равным потоку (но с обратным знаком) через поверхность с бесконечно малым радиусом. В соответствии с п. (а) последний поток равен $-4\pi K$.

- в) Циркуляция вектора $\mathbf{E}$ равна нулю.

- 3.4. Применим теорему Гаусса $\int_S \mathbf{C} \cdot \mathbf{n} \, da = \int_V \nabla \cdot \mathbf{C} \, dV$, выбрав в качестве вектора $\mathbf{C}$ радиус-вектор $\mathbf{R}$, т. е. $\mathbf{C} = \mathbf{R}$. Учитывая, что $\nabla \cdot \mathbf{R} = 3$ [см. п. (а) в решении задачи 2.3], находим

$$\int_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \, da = 3 \int_V dV = 3V$$

Отсюда следует, что

$$V = \frac{1}{3} \int_S \mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \, da. \quad (1)$$

Для сферы в каждой точке поверхности радиус-вектор $\mathbf{R}$, определяющий положение элементарной площадки da , и нормаль к поверхности $\mathbf{n}$ параллельны. Поэтому $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \, da = R \, da$. Так как для всех точек сферы радиус R одинаков, интегрирование в (1) сводится к вычислению суммарной поверхности сферы, которая равна $4\pi R^2$. Поэтому из (1) следует хорошо известный результат $V = (4\pi/3)R^3$. Для прямоугольного параллелепипеда с длинами ребер l_1 , l_2 и l_3 интегрирование в (1) нужно выполнить для каждой грани и результаты сложить. Проведем его для грани, перпендикулярной ребру длиной l_1 . Очевидно, что вектор $\mathbf{n}$ перпендикулярен грани, а вектор $\mathbf{R}$ образует некоторый угол α с вектором $\mathbf{n}$. Если начало координат выбрать в центре параллелепипеда, то легко сообразить, что $\mathbf{R} \cdot \mathbf{n} \, da = R \cdot da \cdot \cos \alpha = (a/2) dS$. Интеграл в (1) сводится к вычислению площади грани, перпендикулярной ребру длиной l_1 , равной $l_2 \cdot l_3$. Точно такой результат получается и для других пяти граней параллелепипеда. Поэтому правая часть в (1) оказывается равной $l_1 l_2 l_3$, т. е. объему параллелепипеда.

К главе 4. Электростатика

- 4.1. Направим ось y вдоль нити. Тогда заряд, приходящийся на элемент длины нити dy , равен $\lambda \, dy$, а его расстояние до точки P равно $\sqrt{y^2 + r^2}$. Интегрируя вдоль нити, находим

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l_1}^{l_2} \frac{\lambda \, dy}{\sqrt{y^2 + r^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{l_2^2 + r^2} + l_2}{\sqrt{l_1^2 + r^2} - l_1}.$$

- а) Пусть $r \gg l_1, l_2$, тогда с точностью до малых членов порядка l^2/r^2 находим

$$\varphi \approx \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \frac{l_1 + l_2}{r}.$$

- б) Пусть теперь $r \ll l_1, l_2$. Тогда с точностью до членов r^2/l^2 получим

$$\varphi = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{4l_1 l_2}{r^2}.$$

Этот результат можно проверить с помощью теоремы Гаусса, поскольку на малых расстояниях от нити сама нить кажется бесконечной в том смысле, что области вблизи концов нити вносят малый вклад в электрическое поле непосредственно около нити.

Окружим нить гауссовой поверхностью в форме цилиндра единичной длины и произвольного радиуса r (но достаточно малого!) и учтем, что около нити электрическое поле радиально. Тогда можно написать

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} da = E_r \int_S da = E_r \cdot 2\pi r = \frac{\lambda}{\epsilon_0}.$$

Отсюда следует, что $E_r = \lambda/2\pi\epsilon_0 r$. Точно такой же результат мы получим, если по найденному выше потенциалу φ определим $E_r = -\partial\varphi/\partial r$.

- 4.2. Найдем потенциал φ в точке P , расположенной на оси диска на расстоянии r от его центра, разбив диск на кольца шириной dr и средним радиусом ρ . Отдельные элементы каждого такого кольца одинаково удалены от точки P на расстояние $\sqrt{\rho^2 + r^2}$, поэтому все они дадут одинаковый вклад в φ . Интегрируя по кольцам, т. е. по ρ , от 0 до R , находим

$$\varphi = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R \frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{\rho^2 + r^2}} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (\sqrt{r^2 + R^2} - r).$$

Отсюда напряженность электрического поля E равна

$$E = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{r^2 + R^2}}\right) = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0} \Omega$$

(Ω — телесный угол, под которым виден диск из точки P) и направлена вдоль оси диска.

4.3. а) $\varphi = \frac{q + q'}{r}.$

б)

$$E_r = \begin{cases} 0, & r < r_a, \\ \frac{q'}{r^2}, & r_a < r < r_b, \\ 0, & r_b < r < r_c, \\ \frac{q + q'}{r^2}, & r_c < r. \end{cases}$$

в) $\varphi|_{r=r_a} = \frac{q + q'}{r_c} + \frac{q'}{r_a} - \frac{q'}{r_b}.$

- г) При $r > r_c$ в выражении для потенциала появляется слагаемое, спадающее с расстоянием быстрее, чем $1/r$, т. е. как $1/r^2$. Оно описывает отличие поля от сферически-симметричного. В области $r_b < r < r_c$ поле по-прежнему равно нулю.

К главе 5. Применения закона Гаусса

- 5.1. Выберем начало координат в центре сферы. В сферической системе координат элемент поверхности сферы можно записать как $da = R^2 d\Omega$, где Ω — элемент телесного угла, под которым видна площадка da . Вообще говоря, потенциал φ зависит от r и Ω , т. е.

$\varphi = \varphi(r, \Omega)$, где зависимость φ от углов определяется вектором телесного угла Ω . Среднее значение потенциала на поверхности сферы радиусом R дается выражением

$$\bar{\varphi} = \frac{1}{4\pi R^2} \int \varphi(r, \Omega) da = \frac{1}{4\pi} \int \varphi(r, \Omega) d\Omega.$$

Согласно первому закону электромагнетизма, поток напряженности электрического поля $E = -\nabla \varphi$ через поверхность сферы равен нулю при отсутствии внутри сферы зарядов, т. е.

$$\begin{aligned} \int \nabla \varphi \cdot n da &= \int (\nabla \varphi)_r da = \int \left[\frac{\partial \varphi(r, \Omega)}{\partial r} \right]_{r=R} \cdot R^2 d\Omega = \\ &= R^2 \left[\frac{d}{dr} \int \varphi(r, \Omega) d\Omega \right]_{r=R} = 0. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$\int \varphi(r, \Omega) d\Omega |_{r=R} = \text{const} = \bar{\varphi} \cdot 4\pi.$$

Таким образом, средние значения потенциала на сферических поверхностях любого радиуса одинаковы. Если взять сферу бесконечно малого радиуса, то из-за того, что потенциал слабо меняется на бесконечно малых расстояниях в пространстве, где нет зарядов, значение интеграла можно найти, вынеся из-под интеграла функцию φ в начале координат. При этом $\int \varphi(r, \Omega) d\Omega = 4\pi\varphi(0)$. Таким образом,

$$\bar{\varphi} = \varphi(0).$$

- 5.2. Используя цилиндрическую симметрию задачи, по теореме Гаусса имеем

$$E_r = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L R^2} r;$$

здесь Q — полный заряд цилиндра, R — его радиус, L — его длина. Следовательно, напряженность электрического поля цилиндра линейно зависит от расстояния до оси цилиндра. В случае шара радиусом R электрическое поле радиально и зависит от r аналогичным образом:

$$E_r = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r.$$

- 5.3. Электрические поля E_1 и E_2 в областях выше и ниже пленки однородны и направлены перпендикулярно пластинам. По условию задачи, потенциалы пластин равны. Отсюда следует, что

$$E_1 \frac{d}{3} = E_2 \frac{2d}{3}, \quad \text{т. е.} \quad E_1 = 2E_2.$$

Далее, окружая пленку соответствующей поверхностью, по теореме Гаусса нетрудно показать, что $E_1 + E_2 = \sigma/\epsilon_0$, где σ — плотность по-

верхностных зарядов на пленке. Отсюда находим

$$E_1 = \frac{2\sigma}{3\epsilon_0} \quad (\text{у верхней пластины}),$$

$$E_2 = \frac{\sigma}{3\epsilon_0} \quad (\text{у нижней пластины}).$$

5.4. В соответствии с первым уравнением Максвелла имеем $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho(x)/\epsilon_0$. Из условия задачи ясно, что электрическое поле будет направлено вдоль оси x и зависеть только от x . Следовательно, уравнение для $E(x)$ имеет вид

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}.$$

Интегрируя это уравнение, получаем искомый ответ

$$E(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(x) dx.$$

5.5. В силу симметрии задачи $\varphi(x, y, z) = \varphi(x)$.

а)
$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{4}{3} kx^{1/3}.$$

Отсюда

$$\sigma|_{x=0} = \epsilon_0 E(0) = 0 \quad \text{и} \quad \sigma|_{x=d} = -\epsilon_0 E(d).$$

Знак минус в последней формуле обусловлен тем, что нормаль к рассматриваемой поверхности коллектора направлена против направления оси x . Таким образом,

$$\sigma|_{x=d} = \frac{4}{3} k d^{1/3}.$$

б) Используя результат задачи 5.4, получаем

$$\rho(x) = \epsilon_0 \frac{dE(x)}{dx}$$

(это уравнение Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ в одномерном случае). Отсюда, используя результат п. (а) данной задачи, находим

$$\rho(x) = -\frac{4}{9} k \epsilon_0 x^{-2/3}.$$

5.6. Искомая сила равна заряду площадки dA , умноженному на поле, создаваемое всей остальной поверхностью проводника в элементарной площадке dA . Чтобы вычислить это поле, учтем то, что площадка dA создает в точках, бесконечно близких к ней, такое же поле, как и бесконечная заряженная плоскость. Величина этого поля равна $\sigma/2\epsilon_0$ (см. § 6 гл. 5 «Лекций», вып. 5), причем вне и внутри проводника оно направлено от поверхности (считаем, что $\sigma > 0$). Однако полное поле, создаваемое всей остальной поверхностью в площадке dA , равно $\sigma/2\epsilon_0$, откуда сразу же следует формула, приведенная в условии задачи.

- 5.7. Так как напряженность электрического поля вблизи поверхности проводника связана с плотностью поверхностных зарядов соотношением $\sigma = \epsilon_0 E$, то число избыточных зарядов (электронов) равно

$$\Delta n = \frac{\sigma}{q_e} = \frac{\epsilon_0 E}{q_e} \approx 5,5 \cdot 10^8 \text{ м}^{-2}.$$

Расстояние между атомами порядка 2—3 Å (1 Å = 10^{-10} м). Поэтому число атомов на единицу площади равно приблизительно 10^{19} м^{-2} . Отсюда $\Delta n/n \approx 2 \cdot 10^{-11}$.

Сила, испытываемая электроном в поле протона, равна

$$F_1 = \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a^2}.$$

Сравним силы F_1 и $F_2 = q_e E$. Принимая величину a равной борovскому радиусу, т. е. 0,5 Å, находим

$$\frac{F_2}{F_1} = \epsilon_0 E \frac{4\pi a^2}{q_e} \approx 2 \cdot 10^{-11}.$$

- 5.8. Если рассматривать ядро как равномерно заряженный шар, то электрическое поле внутри ядра нетрудно найти по теореме Гаусса (см. решение задачи 5.2):

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} r, \quad r \leq R.$$

Здесь R — радиус ядра, Q — полный заряд ядра. Уравнение движения мюона с массой μ (нерелятивистское) имеет вид

$$\mu \ddot{r} = - \frac{q_e Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r,$$

или

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0,$$

где введена частота

$$\omega = \sqrt{\frac{q_e Q}{4\pi\epsilon_0 \mu R^3}} = \sqrt{\frac{q_e Q}{4\pi\epsilon_0 \mu R_0^3 A}}.$$

Подставляя сюда $R_0 = 1,2 \cdot 10^{-15}$ м, $Q = 82 q_e$, $A = 209$, $\mu = 207 m_e$, находим

$$\hbar\omega = 6,1 \text{ Мэв}.$$

Найденная оценка позволяет интерпретировать наблюдаемое явление как квантовые переходы между уровнями энергии осциллятора с испусканием γ -лучей соответствующей энергии.

- 5.9. Введем по аналогии с электрическим полем напряженность гравитационного поля $E = -\nabla\phi$, где ϕ — гравитационный потенциал. Так как законы электростатики и тяготения совпадают по форме, то с помощью теоремы Гаусса можно найти «напряженность» гравитационного поля внутри Земли. Для этого достаточно, например, воспользоваться выражением для E , полученным в решении задачи 5.8, заменив в нем $1/4\pi\epsilon_0$ на гравитационную постоянную γ , а заряд q на массу m :

$$E = - \frac{\gamma M}{R^3} r, \quad r \leq R,$$

где R и M — радиус и масса Земли. Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{r} = mE = -m\gamma \frac{M}{R^3} r.$$

или

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0, \text{ где } \omega = \sqrt{\gamma \frac{M}{R^3}} = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

(g — ускорение свободного падения). Период колебания

$$T_{\text{кол}} = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Для спутника, вращающегося над самой поверхностью Земли, центростремительное ускорение обеспечивается силой гравитации:

$$\frac{mv^2}{R} = mg.$$

Отсюда получаем следующее выражение для линейной скорости:

$$v = \sqrt{gR},$$

и для периода обращения спутника вокруг Земли находим

$$T_{\text{обр}} = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = T_{\text{кол}},$$

что и требовалось доказать.

- 5.10.** В этой задаче следует воспользоваться математической аналогией задачи об определении стационарного поля температур и задачи электростатики (см. § 4 гл. 3 «Лекций», вып. 5). Если в выражении для dT/dr заменить потенциал ϕ температурой T , плотность зарядов ρ — плотностью источников тепла q , постоянную ϵ_0 — теплопроводностью κ , электрическое поле $E = -\nabla\phi$ — потоком тепла $h = -\kappa\nabla T$, то оно совпадает с выражением для электрического поля E внутри равномерно заряженного шара (см. решение задачи 5.8), и, следовательно,

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\kappa R^3} r.$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$T(r) = -\frac{Q}{8\pi\kappa R^3} r^2 + D,$$

где D — постоянная интегрирования, которую следует найти из граничного условия. В качестве последнего можно выбрать $T(R) = 0$. Удовлетворяя граничному условию, находим $D = Q/8\pi\kappa R$ и, следовательно,

$$T(r) = \frac{Q}{8\pi\kappa R^3} (R^2 - r^2).$$

Отсюда температура в центре Земли $T(0) = Q/8\pi\kappa R = 50\,000$ К. Таким образом, описанная модель не находится в согласии с оценками.

- 5.11. Выбирая соответствующую симметрии задачи гауссову поверхность в форме цилиндра, получаем

$$E_r = \begin{cases} 0, & r < r_2, \\ \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0 r}, & r_2 < r < r_3, \\ 0, & r_3 < r < r_4, \\ \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2\pi\epsilon_0 r}, & r_4 < r. \end{cases}$$

Интегрируя соотношение $E_r = -\partial\varphi/\partial r$, определяем

$$\Delta\varphi = \varphi(r_3) - \varphi(r_2) = \int_{r_2}^{r_3} \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \frac{dr}{r} = \frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_3}{r_2}.$$

Из найденных выражений следует:

- 1) при уменьшении r_1 ничего не меняется;
- 2) при увеличении r_2 электрическое поле E не меняется, а $\Delta\varphi$ уменьшается. В пределе $r_2 \rightarrow r_3$ проводники будут соприкасаться, образуя единый проводник, поле в котором равно нулю, а потенциал всюду постоянный;
- 3) картина поля в пространстве между проводниками изменится. Поскольку поверхности проводников эквипотенциальны, поле E больше по величине около углов, чем около плоскостей призмы. В среднем поле между проводниками уменьшилось, поскольку уменьшилась средняя плотность заряда на поверхности внутреннего проводника. Соответственно уменьшилась и разность потенциалов между проводниками $\Delta\varphi$.

К главам 6 и 7. Электрическое поле в разных физических условиях

- 6.1. Полуплоскости, о которых идет речь в условии задачи, — эквипотенциальные поверхности системы четырех зарядов, изображенных на рисунке. Введение на рисунке трех «изображений» позволяет выполнить обязательное для проводника условие, а именно чтобы вектор напряженности электрического поля в каждой точке проводящих полуплоскостей был им перпендикулярен.

Для решения необходимо найти равнодействующую трех сил:

$$F = F_a + F_b + F_c.$$

Абсолютные величины сил равны

$$F_a = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4a^2},$$

$$F_b = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4b^2}, \quad F_c = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4(a^2 + b^2)}.$$

Отсюда находим

$$F_x = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{4(a^2 + b^2)} \cos \alpha \right],$$

$$F_y = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{4(a^2 + b^2)} \sin \alpha \right].$$

Из рисунка ясно, что

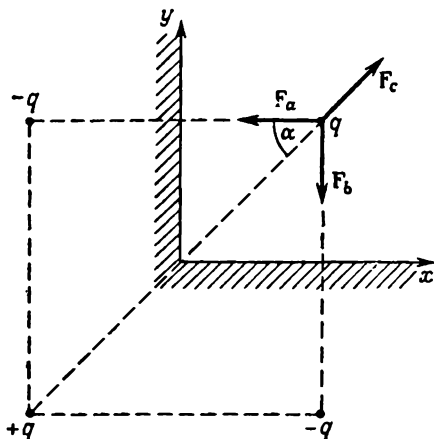
$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Следовательно,

$$F_x = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{a^2} + \frac{a}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right],$$

$$F_y = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{b^2} + \frac{b}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \right].$$

Равнодействующая сил направлена от заряда q в угол проводящих полуплоскостей.



6.2. Сила притяжения к электростатическому изображению равна

$$F = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4x^2}.$$

Потенциальная энергия заряда равна $q\phi$, причем

$$\phi = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_x^\infty \frac{dx}{4x^2} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{4x}$$

(потенциал на бесконечности принят равным нулю). Кинетическая энергия T заряда на расстоянии x от поверхности равна разности потенциальных энергий:

$$T = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{4x} - \frac{1}{4x_0} \right].$$

Отсюда видно, что $T \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$. Это не имеет физического смысла. На самом деле плоскость на бесконечно малых расстояниях от нее нельзя рассматривать как идеально гладкую проводящую плоскость. Необходимо учитывать атомную структуру плоскости.

Оценка при $x = 1 \text{ А}$ и $x_0 = 1 \text{ см}$ дает

$$T = \frac{q^2}{16\pi\epsilon_0 x} \approx 3,6 \text{ эв.}$$

Этот ответ (практически не зависящий от x_0 , поскольку $x_0 \gg x$) дает представление о величине «работы выхода» — энергии, которую нужно сообщить электрону, чтобы удалить его из металла.

- 6.3. Обозначим длину, ширину и толщину бруска через $2a$, $2b$ и $2c$ соответственно. Пусть r — расстояние от центра бруска вдоль интересующей нас прямой. Для $r \gg a$ потенциал φ , создаваемый бруском, такой же, как и для точечного заряда, т. е.

$$\varphi = \frac{8\rho abc}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{или} \quad \ln \frac{\varphi 4\pi\epsilon_0}{8\rho bc} = -\ln \frac{r}{a}.$$

Приближенно можно считать эту формулу справедливой вплоть до $r = a$. При меньших r ($b < r < a$) разумную аппроксимацию φ дает потенциал длинной нити, который запишем в виде

$$\varphi = -\frac{8\rho bc}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{r}{a} + D.$$

Постоянную D выберем из условия непрерывности потенциала при $r = a$. Находим $D = 4\rho bc/2\pi\epsilon_0$.

Таким образом, при $b < r < a$

$$\varphi = \frac{8\rho bc}{4\pi\epsilon_0} \left(1 - \ln \frac{r}{a}\right).$$

При $c < r < b$ хорошее приближение дает формула для бесконечной плоскости

$$\varphi = -\frac{\rho c}{\epsilon_0} r + F.$$

Сравнивая эту формулу с предыдущей при $r = b$, получаем

$$F = \frac{\rho bc}{\epsilon_0} \left(1 + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{b}{a}\right).$$

Для $0 < r < c$ имеем $\varphi = -(\rho r^2/2\epsilon_0) + G$, где $G = -(\rho c^2/2\epsilon_0) + F$.

Мы можем теперь вычислить потенциал в центре бруска

$$\varphi(0) = G = \frac{\rho bc}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{c}{2b} + \frac{2}{\pi} - \frac{2}{\pi} \ln \frac{b}{a}\right) \approx 0,6 \cdot 10^3 \text{ в.}$$

Так как $E_r = -\partial\varphi/\partial r$, то из найденных выше выражений для φ получим

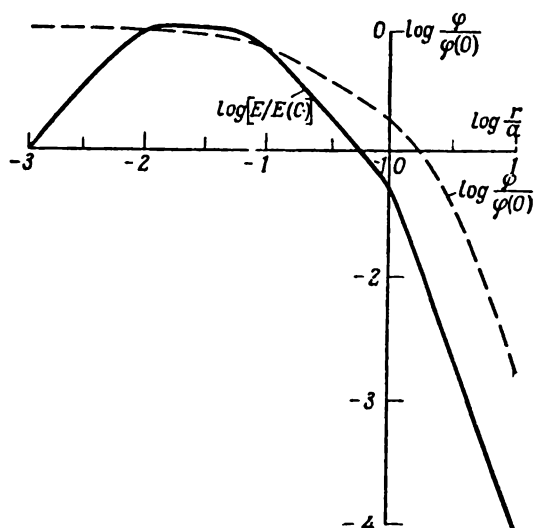
$$E = \frac{8\rho abc}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad r \gg a,$$

$$E = \frac{4\rho bc}{2\pi\epsilon_0 r}, \quad b < r < a,$$

$$E = \frac{\rho c}{\epsilon_0}, \quad c < r < b,$$

$$E = \frac{\rho r}{\epsilon_0}, \quad 0 < r < c.$$

График зависимости $\log [\varphi/\varphi(0)]$ и $\log [E/E(0)]$ от $\log (r/a)$ показан на рисунке.



- 6.4. Заряд, который накопился бы на Земле за время t , равен $q = \eta S q_p t$, где $\eta = 1 \text{ см}^{-2} \cdot \text{сек}^{-1}$ — плотность потока протонов, $S = 4\pi R^2$ — площадь поверхности Земли, R — радиус Земли, q_p — заряд протона. Критический заряд q Земли, при котором все заряды с кинетической энергией $E < 4 \cdot 10^9$ эв не будут попадать на Землю, можно найти из очевидного условия

$$\frac{qq_p}{4\pi\epsilon_0 R} = \eta \frac{Stq_p^2}{4\pi\epsilon_0 R} \geq E.$$

откуда

$$t_{\text{крит}} = \frac{E\epsilon_0}{\eta q_p^2 R} \approx 0.1 \text{ года}$$

Земля (по оценкам) существует $5 \cdot 10^9$ лет. Казалось бы, на Землю уже давно не должно падать ни одного протона. На самом же деле положительный заряд Земли постоянно компенсируется за счет потока электронов, энергия которых слишком мала, чтобы эти электроны можно было отнести к космическим лучам.

- 6.5. Емкость единицы длины цилиндрического конденсатора определяется из соотношения

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2},$$

где q — заряд на единицу длины, $\varphi_1 - \varphi_2$ — разность потенциалов цилиндров конденсатора. Используя результаты, полученные при решении задачи 6.11, и считая a внешним радиусом внутреннего

цилиндра, а b — внутренним радиусом внешнего, получаем

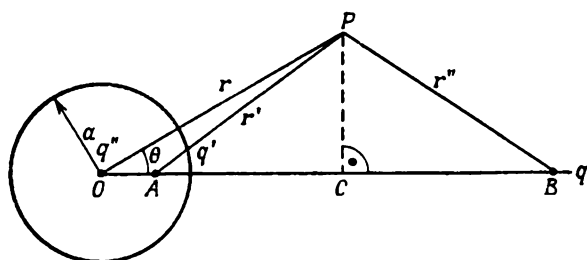
$$\varphi_1 - \varphi_2 = \int_a^b E dr = \frac{q}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{b}{a}.$$

Следовательно, емкость на единицу длины

$$C = \frac{q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

Если на внутренней поверхности внешнего цилиндра имеется острый выступ, то емкость конденсатора увеличится. Представим себе, что таких выступов очень много. Это эквивалентно уменьшению отношения b/a и, естественно, приводит к увеличению емкости в соответствии с полученной формулой. Очевидно, что и появление одного выступа будет вызывать тот же эффект. Если же выступ имеется на внешней поверхности внешнего цилиндра, то он не окажет никакого влияния на емкость конденсатора (поле снаружи конденсатора равно нулю).

- 6.6. а) Чтобы найти поле системы точечный заряд — проводящая сфера, надо поступить следующим образом (см. «Лекции», вып. 5, стр. 125). Необходимо поместить изображение заряда q величины $q' = -(a/b)q$ на прямой, проходящей через заряд q и центр сферы на расстоянии a^2/b от центра сферы, и, кроме того, в центре сферы поместить заряд $q'' = -q'$ (см. рисунок)



$$OA = a^2/b,$$

$$OC = r \cos \theta,$$

$$OB = b,$$

$$AC = r \cos \theta - (a^2/b),$$

$$CP = r \sin \theta,$$

$$CB = b - r \cos \theta.$$

Тогда потенциал в точке P равен

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r''} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r} \right],$$

где

$$r' = \sqrt{(AC)^2 + (PC)^2} = \sqrt{r^2 - 2\frac{a^2}{b}r \cos \theta + \frac{a^4}{b^2}},$$

$$r'' = \sqrt{(CB)^2 + (PC)^2} = \sqrt{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}.$$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{r^2 - 2br \cos \theta + b^2}} - \frac{aq/b}{\sqrt{r^2 - 2\frac{a^2}{b}r \cos \theta + \frac{a^4}{b^2}}} + \frac{aq/b}{r} \right].$$

Плотность зарядов на поверхности сферы определяется по формуле

$$\sigma = -\epsilon_0 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \frac{q}{4\pi} \left[\frac{1}{ab} - \frac{b^2 - a^2}{a(a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta)^{1/2}} \right].$$

- б) В этом случае заряд $q'' = 4\pi\epsilon_0 Va$, а сила притяжения к сфере заряда q дается выражением

$$F = \frac{qq''}{4\pi\epsilon_0 b^2} + \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 (b - a^2/b)^2} = \frac{qVa}{b^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{ab}{(a^2 - b^2)^2}.$$

- 6.7. Покажем, что суммарная поверхностная плотность зарядов, создаваемая двумя противоположно заряженными шарами, слабо сдвинутыми друг относительно друга, действительно меняется как $A \cos \theta$. Пусть объемная плотность зарядов каждого из шаров по абсолютной величине равна ρ . Поверхностная плотность при $\theta = 0$ (см. рисунок), равна ρd , а при $\theta \neq 0$ имеем $\sigma(\theta) = \rho h(\theta)$, где $h(\theta) = d \cos \theta$. Таким образом, $\sigma(\theta) = A \cos \theta$, причем $A = \rho d$.

Поскольку поле вне равномерно заряженного шара с плотностью объемных зарядов ρ равно полю точечного заряда $q = (4\pi/3)R^3\rho$, напряженность электрического поля вне сферы равна напряженности электрического поля диполя с дипольным моментом, равным по величине $p = qd = (4\pi/3)R^3\rho d = (4\pi/3)AR^3$ и направленным по оси z . Напряженность электрического поля внутри равномерно заряженного шара, как известно, равна

$$E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0},$$

или

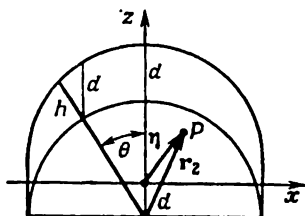
$$E_x = \frac{\rho x}{3\epsilon_0}, \quad E_y = \frac{\rho y}{3\epsilon_0}, \quad E_z = \frac{\rho z}{3\epsilon_0}.$$

Для нашего случая вектор E в некоторой точке P , расположенной внутри сферы, равен

$$E = \frac{\rho}{3\epsilon_0} (r_1 - r_2).$$

Расписывая это соотношение в компонентах и принимая во внимание, что $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2 - d$, находим

$$E = -\frac{\rho d}{3\epsilon_0} e_z = -\frac{A}{3\epsilon_0} e_z.$$



- 6.8. а) Угол θ определим так же, как в «Лекциях» (вып. 5, стр. 113). Угол φ_0 характеризует положение плоскости, проведенной через векторы p и r . От этого угла не зависит ни потенциал, ни поле. Согласно формуле (6.11) «Лекций» (вып. 5, стр. 113),

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

Радiallyнная составляющая напряженности электрического поля

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{2p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

Тангенциальная составляющая E_θ определяется градиентом в перпендикулярном радиусу-вектору направлении. Приращение расстояния на этом пути равно $dl = r d\theta$ (см. рисунок), поэтому

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3}.$$

Поскольку потенциал не зависит от полярного угла, соответствующая компонента напряженности электрического поля E_φ равна нулю.

- б) Угол α между вектором E и прямой, проходящей через начало координат, определяется соотношением (см. рисунок)

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{E_\theta}{E_r} = \frac{1}{2} \operatorname{tg} \theta,$$

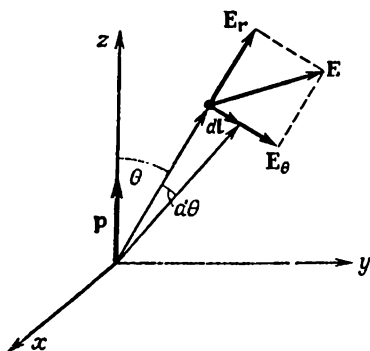
т. е. не зависит от расстояния до диполя.

в) Из полученных формул находим

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p}{r^3} \quad \text{при } \theta = 0$$

$$E = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} e_r - \frac{p}{r} \right) \quad \text{при } \theta = \frac{\pi}{4},$$

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p}{r^3} \quad \text{при } \theta = \frac{\pi}{2}.$$



- 6.9. а) Потенциал в пространстве при наличии однородного электрического поля можно записать в виде

$$\varphi = -(E_0 \cdot r) + \frac{(p \cdot r)}{4\pi\epsilon_0 r^3}.$$

В случае $E_0 \parallel p \parallel e_z$ имеем

$$\varphi = -E_0 z + \frac{pz}{4\pi\epsilon_0 r^3} = z \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 \right).$$

Эквипотенциальную поверхность определим из условия

$$\frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} - E_0 = 0, \text{ откуда } r = \left(\frac{p}{4\pi\epsilon_0 E_0} \right)^{1/3}.$$

Если радиус сферы равен a , то $p = E_0 a^3 \cdot 4\pi\epsilon_0$.

- б) Электрическое поле вычисляем по формуле

$$E = -\nabla \varphi = E_0 + \frac{3r(p \cdot r) - pr^2}{4\pi\epsilon_0 r^5} = E_0 - \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3} + \frac{3rzp}{4\pi\epsilon_0 r^5}.$$

На поверхности сферы

$$E = 3E_0 \cos \theta.$$

в) Поле не изменится.

г) $\sigma = \epsilon_0 E = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$.

д) $\mathbf{p} = \int \mathbf{r} \sigma dS = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_0 \mathbf{e}_z$, где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси z .

е) Полученные результаты могут быть использованы, в частности, для решения задачи о поле и распределении зарядов металлической сферы, помещенной в однородное внешнее электрическое поле.

6.10. Соответствующим образом выбирая поверхность, с помощью теоремы Гаусса легко можно найти напряженность электрического поля равномерно заряженной нити:

$$\mathbf{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y}{r^2},$$

где $\mathbf{e}_x$ и $\mathbf{e}_y$ — единичные векторы в плоскости, перпендикулярной нити, направленные вдоль осей x и y соответственно.

Найдем выражения для силы $\mathbf{F}$ и ее момента $\mathbf{M}$, действующих на диполь в произвольном электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.

Предположим, что отрицательный заряд диполя расположен в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r}$, а положительный заряд — в точке с радиусом-вектором $\mathbf{r} + \mathbf{d}$, так что дипольный момент диполя равен $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$. Тогда суммарная сила, действующая на диполь, может быть представлена как сумма сил, действующих на его заряды:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - q\mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Считая величину $\mathbf{d}$ малой, разложим электрическое поле в точке $\mathbf{r} + \mathbf{d}$ в ряд по $\mathbf{d}$ и ограничимся линейными по $\mathbf{d}$ членами разложения:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} dx + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial y} dy + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial z} dz = \mathbf{E}(\mathbf{r}) + (\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}).$$

Подставляя этот ряд в выражение для $\mathbf{F}$, находим

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}$$

Чтобы вычислить момент сил, действующих на диполь, поступим аналогичным образом. Вспомня определение момента силы, с точностью до линейных по $\mathbf{d}$ членов разложения находим

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= (\mathbf{r} + \mathbf{d}) \times q\mathbf{E}(\mathbf{r} + \mathbf{d}) - \mathbf{r} \times q\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \\ &= q\mathbf{d} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (q\mathbf{d} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Учитывая найденное выше выражение для силы $\mathbf{F}$, окончательно находим

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

а) Выполняя несложное дифференцирование, имеем

$$\mathbf{F} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r^2}, \quad \mathbf{M} = 0.$$

б)
$$\mathbf{F} = 0, \quad \mathbf{M} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p}}{r}.$$

В последнем случае момент силы направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через нить и диполь.

- 6.11. Задачу нетрудно решить, если рассматривать данную пластину как плоский конденсатор с бесконечно малым расстоянием d между его обкладками и с плотностями поверхностных зарядов $+\sigma$ и $-\sigma$, такими, что $p = N\sigma d$. Электрическое поле вне такого конденсатора равно нулю, в чем можно убедиться из теоремы Гаусса. Поэтому потенциалы электрического поля по обеим сторонам от пластины постоянны и не зависят от расстояния до этой пластины. Однако величина этих потенциалов различна, причем разность между ними есть не что иное, как разность потенциалов между пластинами конденсатора. Так как напряженность электрического поля внутри плоского конденсатора равна σ/ϵ_0 , то разность потенциалов равна $\sigma d/\epsilon_0 = p/\epsilon_0$.

6.12. а)
$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \right].$$

б)
$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{x^2} + \frac{x}{\{a^2 + x^2\}^{3/2}} \right].$$

- в) Пусть $x \gg a$. Тогда с точностью до малых членов порядка a^2/x^2 имеем

$$E_x = -\frac{3qa^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}.$$

Следовательно, электрическое поле кольца убывает быстрее поля диполя. Это происходит в силу того, что дипольный момент заряженного кольца равен нулю.

- 6.13. Уменьшение тока при $t > t_1$ происходит потому, что заряд верхней пластины меняет знак и начинает отталкивать электроны.

Заряд на пластине конденсатора после отсоединения батареи равен $q = C\varphi$, где C — емкость, φ — разность потенциалов между пластинами. Время, в течение которого будет скомпенсирован этот заряд q , определится из условия $q = It_1$. Отсюда

$$t_1 = 1000 \text{ сек.}$$

Ток обратится в нуль, когда разность потенциалов такова, что $e\varphi_{\text{макс}}$ равно максимальной энергии частиц $1,5 \text{ эв}$. При $t > t_2$ разность потенциалов постоянна и равна $1,5 \text{ в}$. При увеличении расстояния между пластинами емкость конденсатора падает вдвое. Если это увеличение произошло до того, как конденсатор был полностью заряжен, то после отсоединения батареи заряд на пластинах будет вдвое меньше и, следовательно, время t_1 также вдвое меньше.

Если расстояние между пластинами увеличить после удаления батареи, то как заряд на пластинах, так и время t_1 не изменятся.

- 6.14. а) Для бесконечно длинной палочки напряженность электрического поля нетрудно вычислить по теореме Гаусса:

$$E = \begin{cases} \frac{ar^3}{4\epsilon_0} \frac{r}{r}, & r \leq R, \\ \frac{aR^4}{4\epsilon_0 r} \frac{r}{r}, & r \geq R, \end{cases}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор в плоскости, перпендикулярной оси палочки. Таким образом,

$$E(0, 0, 0) = 0,$$

$$E(0, 0,005, 0) = \frac{ar^3}{4\epsilon_0} = 0,7 \cdot 10^4 \text{ в/м},$$

$$E(0, 0,01, 0) = \frac{aR^3}{4\epsilon_0} = 5,6 \cdot 10^4 \text{ в/м},$$

$$E(0, 0,02, 0) = \left(\frac{aR^3}{4\epsilon_0} \right) \frac{R}{0,02} = 2,8 \cdot 10^4 \text{ в/м}.$$

- б) Значение потенциала в начале координат можно найти из интегрального выражения

$$\varphi(0, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r}'|},$$

в котором интегрирование производится по объему палочки. Интегрирование удобно выполнить в цилиндрической системе координат. Именно, разбивая поперечное сечение цилиндра на кольца площадью $2\pi r dr$, а длину цилиндра на отрезки dx , запишем $|\mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 + x^2}$, $dV = 2\pi r dr dx$. Тогда

$$\varphi(0) = \frac{2\pi a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^R r^3 dr \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{a}{\epsilon_0} \int_0^R r^3 \ln \frac{l + \sqrt{4r^2 + l^2}}{-l + \sqrt{4r^2 + l^2}} dr.$$

Поскольку $l/2r \geq 50$, разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням отношения $2r/l$. Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, имеем

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \frac{a}{\epsilon_0} \int_0^R r^3 \left(\ln \frac{l}{r} + \frac{r^2}{l^2} + \dots \right) dr = \\ &= \frac{aR^4}{\epsilon_0} \left[\frac{1}{16} + \frac{1}{4} \ln \frac{l}{R} + \frac{R^2}{6l^2} \right] \approx \frac{aR^4}{16\epsilon_0} \left[1 + 4 \ln \frac{l}{R} \right]. \end{aligned}$$

Точность этого выражения оценим, вычислив поправку $aR^6/6\epsilon_0 l^2$. Подставляя численные значения из условия задачи, находим $\varphi(0, 0, 0) \approx 2350$ в, причем ошибка составляет примерно 0,15 в.

- в) Для того чтобы положительный заряд переместить в начало координат из точки $(0, 0, l/2)$, необходимо затратить работу против сил отталкивания внутри самой палочки. Поэтому потенциал в точке $(0, 0, l/2)$ меньше, чем в центре палочки.

К главе 7. Электрическое поле в разных физических условиях (продолжение)

- 7.1. а) Потенциал, создаваемый нитями в произвольной точке $P(x, y)$, дается выражением

$$\varphi = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1}. \quad (1)$$

Эквипотенциальные поверхности определяются условием $r_2/r_1 = \text{const}$, т. е.

$$\frac{(x - d/2)^2 + y^2}{(x + d/2)^2 + y^2} = \text{const}.$$

Если это уравнение записать иначе, т. е. $(x - a)^2 + y^2 = R^2$, то видно, что оно описывает цилиндр вращения. В последнем уравнении a и R — некоторые константы, выражающиеся через величины, входящие в исходное уравнение.

- б) Определим емкость, приходящуюся на единицу длины. Для этого вычислим потенциал проводов:

$$\Phi|_{\text{провода} + \lambda} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{d},$$

$$\Phi|_{\text{провода} - \lambda} = +\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{d}.$$

Отсюда

$$\Phi|_{+\lambda} - \Phi|_{-\lambda} = -\frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_0}{d}$$

и

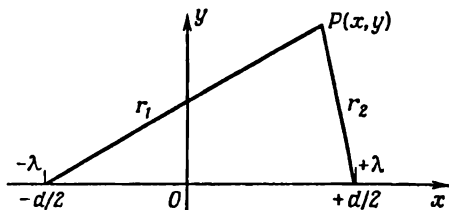
$$C^* = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(d/r_0)}.$$

в)

$$f(z) = U + iV = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}.$$

Покажем, что $\Phi = \text{Re } f(z)$ при $x, y \gg d$. Действительно,

$$\begin{aligned} \Phi &= -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{\left(x + \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}}{\sqrt{\left(x - \frac{d}{2}\right)^2 + y^2}} \approx \\ &\approx -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{(x^2 + y^2) + xd}{(x^2 + y^2) - xd} = -\frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(1 + \frac{2xd}{x^2 + y^2}\right) \approx \\ &\approx -\frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{x^2 + y^2} = -\frac{\lambda d}{2\pi\epsilon_0} \text{Re } \frac{1}{z}. \end{aligned}$$



К главе 8. Электростатическая энергия

- 8.1. Энергия взаимодействия пары протонов p_i и p_j равна e^2/r_{ij} , где r_{ij} — расстояние между протонами, которые будем считать точечными. Среднее значение величины $1/r_{ij}$ при равномерном распределении точек по шару равно $6/5r$ (см. § 1 гл. 8 «Лекций», вып. 5), а число

пар протонов, очевидно, составляет $Z(Z-1)/2$. Следовательно, электростатическая энергия кулоновского взаимодействия протонов в ядре равна $(3/5)Z(Z-1)(q^2/4\pi\epsilon_0 r)$.

- 8.2. Энергия заряженного конденсатора емкостью C определяется формулой $U = (1/2)CV^2$, где V — разность потенциалов на обкладках. Искомая работа равна разности энергий конденсатора до и после поворота ручки настройки:

$$U_1 - U_2 = \frac{C_1 - C_2}{2} V^2 = 4,05 \cdot 10^{-6} \text{ Дж.}$$

- 8.3. Суммарная энергия конденсаторов до их параллельного соединения записывается в виде

$$U_0 = \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2}.$$

Поскольку при параллельном соединении конденсаторов их емкости складываются, то энергия системы после соединения равна

$$U_1 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{2(C_1 + C_2)}.$$

Вычислим разность

$$U_1 - U_0 = - \frac{(q_1 C_2 - q_2 C_1)^2}{2C_1 C_2 (C_1 + C_2)} < 0.$$

Избыток энергии излучается или теряется на тепло в соединительных проводах. Потери энергии не происходит, если $q_1 C_2 = q_2 C_1$.

- 8.4. а) Пусть $\varphi(\mathbf{r})$ — потенциал внешнего электрического поля, в котором в точке $\mathbf{R}$ помещен диполь, обладающий моментом $\mathbf{p}$, т. е. в точке $\mathbf{R} + \mathbf{r}_1$ имеется заряд $+q$, а в точке $\mathbf{R} + \mathbf{r}_2$ — заряд $-q$ ($|\mathbf{r}_1|$ и $|\mathbf{r}_2| \ll |\mathbf{R}|$), так что $\mathbf{p} = q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. Энергия зарядов диполя во внешнем поле равна

$$\begin{aligned} U &= q[\varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{r}_2)] = \\ &= q[\varphi(\mathbf{R}) + \mathbf{r}_1 \nabla \varphi|_{\mathbf{r}=0} + \dots] - q[\varphi(\mathbf{R}) + \mathbf{r}_2 \nabla \varphi|_{\mathbf{r}=0} + \dots] = \\ &= q(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \nabla \varphi(\mathbf{r})|_{\mathbf{r}=\mathbf{R}} = -(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r})). \end{aligned} \quad (1)$$

- б) В общем случае момент сил, действующий на диполь, равен (см. решение задачи 6.10)

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}(\mathbf{R}) + \mathbf{R} \times (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}(\mathbf{R}).$$

Отсюда в случае однородного электрического поля следует $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ [так как $(\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E} = 0$]. Последнее выражение получается также и другим путем: если ввести угол α между векторами $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$, то из выражения (1) получаем, что действующий на диполь момент сил определяется выражением

$$M = \frac{\partial U}{\partial \alpha} = \frac{\partial}{\partial \alpha} (-pE \cos \alpha) = pE \sin \alpha$$

и направлен перпендикулярно плоскости, в которой лежат векторы $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$, т. е. $\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$.

- в) Если диполь создан путем последовательного помещения зарядов в электрическое поле, то его электростатическая энергия

будет отличаться от (1). Действительно, если заряд $+q$ помещен в точке $R + r_1$ и, следовательно, обладает энергией $q\varphi(R + r_1)$ то при помещении заряда $-q$ в точку $R + r_2$ будет затрачена работа

$$-q\varphi(R + r_2) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 |r_1 - r_2|}.$$

Таким образом, энергия диполя в этом случае будет меньше, и она равна

$$U = q\varphi(R + r_1) - q\varphi(R + r_2) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 |p|} = -(p \cdot E(R)) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 |p|}.$$

Искомая разность энергий равна $q^2/4\pi\epsilon_0 |p|$ и имеет смысл энергии взаимодействия зарядов, составляющих диполь.

- 8.5. Электростатическая энергия конденсатора равна $W = q^2/2C$, где q — заряд на обкладках, C — емкость, равная $C = \epsilon_0 A/d$ (d — расстояние между обкладками, A — их площадь). Искомая сила дается выражением

$$F = -\frac{\partial W}{\partial d} = -\frac{q^2}{2\epsilon_0 A},$$

а работа этой силы на расстоянии dx равна $-(q^2/2\epsilon_0 A)dx$.

- 8.6. Разность Δ энергий покоя мезонов равна $\Delta = (m_{\pi^+} - m_{\pi^-})c^2 = 4,6 \text{ Мэв}$. Если заряд мезонов равномерно «размазан» по объему шара, то собственная электростатическая энергия мезона дается выражением [см. формулу (8.7) в «Лекциях» (вып. 5) и решение задачи 8.1]

$$W = \frac{3}{5} \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

Из условия $\Delta = W$ получаем радиус пиона $a = 2 \cdot 10^{-14} \text{ см}$. Отсюда видно, что определенный таким образом радиус пиона оказывается меньше характерных размеров ядра.

- 8.7. Когда оболочка не заряжена, то на основании закона Гаусса убеждаемся, что электрическое поле помещенного в начало координат заряда q_1 внутри ($r \leq a$) и вне оболочки ($r > b$) совпадает с хорошо известным электрическим полем точечного заряда q_1 . В самой же оболочке ($a \leq r \leq b$) напряженность электрического поля равна нулю. Очевидно, работа по перемещению заряда из бесконечности в начало координат равна разности энергий, заключенных в поле, одна из которых отвечает заряду в начале координат, а вторая — заряду q_1 , помещенному на бесконечности. (Тот факт, что энергия точечного заряда бесконечна, не приводит к затруднению, поскольку мы вычисляем не сами энергии, а их разность). Искомая работа W_1 дается выражением

$$W_1 = -\frac{e_0}{2} \int_{a \leq r \leq b} E^2 dV = \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{a-b}{ab}.$$

Когда оболочка имеет заряд q_2 , ситуация несколько иная. В начальном состоянии, когда заряд q_1 находится на бесконечности, энергия, сосредоточенная в поле, равна энергии точечного заряда q_1 плюс энергия в поле, создаваемом сферической оболочкой. Последнее, как

легко убедиться на основании теоремы Гаусса, отлично от нуля лишь при $r \geq b$ и совпадает с полем точечного заряда q_2 . В конечном же состоянии, когда заряд q_1 расположен в начале координат, величина напряженности электрического поля в пространстве ведет себя следующим образом (разумеется, поле всюду радиально):

$$E = \begin{cases} \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r < a, \\ 0, & a \leq r \leq b, \\ \frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, & r > b. \end{cases}$$

Следовательно, искомая работа W_2 во втором случае равна

$$\begin{aligned} W_2 &= W_1 + \frac{e_0}{2} \int_{r \geq b} \left[\left(\frac{q_1 + q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 - \left(\frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 - \left(\frac{q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right)^2 \right] dV = \\ &= \frac{q_1^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{a-b}{ab} + \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 b}. \end{aligned}$$

К главе 10. Диэлектрики

10.1. Для энергии конденсатора можно написать соотношение

$$\kappa_1 \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV_1 + \kappa_2 \int \frac{\epsilon_0 E^2}{2} dV_2 = \frac{CV^2}{2},$$

где V — разность потенциалов на обкладках, а интегрирование производится по двум областям конденсатора. Поскольку поле E в конденсаторе можно считать однородным, то из этого соотношения, если учесть, что $Ed = V$, следует

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \frac{(\kappa_1 + \kappa_2)}{2}.$$

10.2. Емкость конденсатора без диэлектрика равна $C_0 = A\epsilon_0/d$ (A — площадь пластин, d — расстояние между ними). Заряд $Q = C_0 V_0$ (V_0 — разность потенциалов). При вдвижении диэлектрика величина Q не меняется, емкость же возрастает, причем она определяется выражением (см. решение задачи 10.1 при $\kappa_1 = 1$) $C = A\epsilon_0(1 + \kappa)/2d = C_0(1 + \kappa)/2$. Энергия конденсатора при этом равна

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{C_0 V_0^2}{1 + \kappa}.$$

а) Искомая сила

$$F = - \frac{\partial U}{\partial d} = - \frac{Q^2}{2C^2} \frac{\partial C}{\partial d} = - \frac{C_0 V_0^2}{(1 + \kappa)} \frac{1}{d} = - 7,1 \cdot 10^{-8} \text{ ньютон}.$$

б) Дипольный момент единицы объема при этом равен

$$\begin{aligned} P &= (\kappa - 1) \epsilon_0 E = (\kappa - 1) \epsilon_0 \frac{V}{d} = \frac{(\kappa - 1) \epsilon_0}{Cd} Q = \\ &= \frac{(\kappa - 1)}{(\kappa + 1)} \frac{2\epsilon_0 V_0}{d} = 1,1 \cdot 10^{-8} \text{ кулон/м}^2. \end{aligned}$$

в) Меньше.

- 10.3. В отсутствие диэлектрика заряд Q на пластинах конденсатора и разность потенциалов между обкладками φ_0 связаны соотношением $Q = C_0 \varphi_0$, где $\varphi_0 = E_1 d$ (d — расстояние между пластинами). При наличии диэлектрика $Q = C \varphi$, причем $E_2 = E_1 / \kappa$. Отсюда $Q = C [E_1 (d - t) + E_1 t / \kappa]$. Поскольку, с другой стороны, $Q = C_0 E_1 d$, то, приравнявая выражения для Q , находим

$$C = C_0 \left[1 - \frac{t}{d} \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \right]^{-1}.$$

- 10.4. Вектор электрической индукции $\mathbf{D}$ в любой точке $\mathbf{r}$ внутри диэлектрика равен

$$\mathbf{D} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Так как $\mathbf{D} = \kappa\epsilon_0\mathbf{E} = \epsilon_0\mathbf{E} + \mathbf{P}$, то

$$\mathbf{P} = (\kappa - 1)\epsilon_0\mathbf{E} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \mathbf{D} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

Поверхностная плотность зарядов $\sigma_{\text{пол}} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$.

- а) Наведенные на внутренней и внешней поверхностях диэлектрика заряды Q_a и Q_b определяются выражением

$$Q_a = Q_b = 4\pi a^2 \sigma_{\text{пол}}|_{r=a} = \frac{(\kappa - 1)}{\kappa} \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

- б) $\rho_{\text{пол}} = -\nabla \cdot \mathbf{P} = 0$.

- 10.5. Изменение внутренней энергии конденсатора $U = Q^2/2C$ (здесь Q — заряд на пластинах, C — емкость) в процессе, в котором механические силы вдвигают диэлектрик, изменяя емкость конденсатора, а батарея совершает работу по изменению заряда пластин на величину dQ , определяется выражением

$$dU = \frac{Q}{C} dQ - \frac{Q^2}{2C^2} dC.$$

Первое слагаемое в данном выражении представляет собой работу, совершаемую электрической батареей при изменении заряда на пластинах конденсатора, а второе — работу механических сил со знаком минус.

Поскольку разность потенциалов на пластинах сохраняется постоянной и равной $V_0 = Q/C$, выражение для dU можно записать в виде

$$dU = V_0 dQ - \frac{V_0^2}{2} dC.$$

- а) Подсчитаем работу, совершаемую электрической батареей. Учитывая, что заряд на пластинах в начальном состоянии равен q_0 , а в конечном состоянии κq_0 , находим

$$\int_{q_0}^{\kappa q_0} V_0 dQ = V_0 \int_{q_0}^{\kappa q_0} dQ = q_0 V_0 (\kappa - 1).$$

- б) Емкость конденсатора в начальном состоянии равна q_0/V_0 , а в конечном $\kappa q_0/V_0$. Следовательно, механические силы совершают работу

$$\int_{q_0/V_0}^{\kappa q_0/V_0} \frac{V_0^2}{2} dC = \frac{V_0 q_0}{2} (\kappa - 1).$$

Эта работа, как мы видим, производится над диэлектриком.

- 10.6. В некотором смысле данная задача аналогична п. (б) предыдущей задачи. Над диэлектриком (маслом) совершается механическая работа, которая переходит в потенциальную энергию столбика масла в поле силы тяжести. Эта работа дается выражением

$$W = \frac{V^2}{2} (C_2 - C_1).$$

где C_1 и C_2 — емкости трубки до и после втягивания масла на высоту h . Так как емкость единицы длины цилиндрического конденсатора $C_0 = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$ (см. решение задачи 6.5), то

$$W = \frac{V^2}{2} (\kappa - 1) h \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(b/a)}.$$

Вес столбика втянутого масла равен $\pi(b^2 - a^2)\rho gh$. Потенциальная энергия этого столбика в поле силы тяжести равна весу, умноженному на координату его центра тяжести, т. е. на $h/2$:

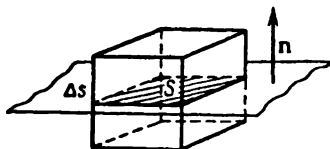
$$\frac{\pi(b^2 - a^2)}{2} \rho gh^2.$$

Из условия равенства работы механических сил и потенциальной энергии находим требуемый результат:

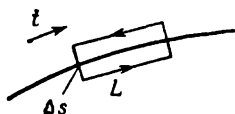
$$h = \frac{2\epsilon_0 V^2 (\kappa - 1)}{(b^2 - a^2) \rho g \ln(b/a)}.$$

- 10.7. Граничные условия на границе раздела двух сред (1) и (2) имеют вид: $E_{1t} = E_{2t}$, $D_{1n} = D_{2n}$ или $E_{1n}/\kappa_1 = E_{2n}/\kappa_2$, где индексами n и t помечены нормальные и тангенциальные к поверхности раздела составляющие векторов. Эти граничные условия следуют из уравнений Максвелла $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ и $\nabla \times \mathbf{E} = 0$.

Действительно, рассмотрим произвольную поверхность раздела двух сред (фиг. 1). Выберем произвольным образом направление внешней нормали $\mathbf{n}$ к этой поверхности и условимся обозначать индексами 1 и 2 величины, относящиеся соответственно к нижней и верхней средам.



Фиг. 1



Фиг. 2

Выделим мысленно около рассматриваемой точки поверхности прямую призму с образующими Δs , перпендикулярными поверхности. Пусть эта призма вырезает на поверхности элемент площади S столь

малый, это его можно считать плоским. По теореме Гаусса поток вектора электрической индукции через поверхность призмы должен равняться нулю, т. е. $\int \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} da = \int \nabla \cdot \mathbf{D} dV = 0$. При стремлении Δs к нулю поток вектора $\mathbf{D}$ через боковую поверхность призмы также стремится к нулю. Для потока же через верхнее и нижнее основания призмы получаем

$$(\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n}) S - (\mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}) S = 0.$$

Отсюда следует искомое граничное условие

$$D_{1n} = D_{2n}.$$

Покажем теперь, что на границе раздела двух сред касательная (тангенциальная) составляющая вектора напряженности электрического поля $\mathbf{E}$ непрерывна. С этой целью выберем около произвольной поверхности (на фиг. 2 ее сечение плоскостью рисунка показано сплошной линией) контур в виде прямоугольной рамки, боковые стороны Δs которой нормальны к поверхности раздела сред. Выберем размеры этого контура столь малыми, чтобы поверхность раздела двух сред можно было считать плоской. На эту рамку мысленно «натянем» стоксову поверхность. Тогда по теореме Стокса имеем

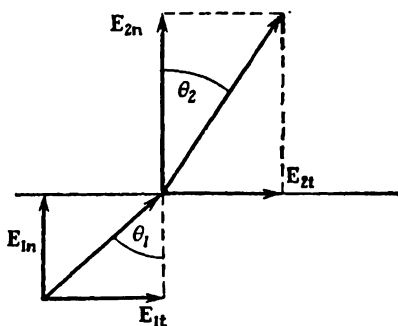
$$\int (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{n} da = \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0.$$

Но при стремлении Δs к нулю вклад в интеграл по контуру от боковых сторон рамки также стремится к нулю. Если длину L верхней и нижней сторон рамки выбрать достаточно малой, то напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ на этих сторонах рамки можно считать однородной. Отсюда $(\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t}) L - (\mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}) L = 0$, или $E_{1t} = E_{2t}$. Из фиг. 3 имеем

$$\operatorname{tg} \theta_1 = \frac{E_{1t}}{E_{1n}} \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} \theta_2 = \frac{E_{2t}}{E_{2n}}.$$

Отсюда следует, что

$$\kappa_1 \operatorname{ctg} \theta_1 = \kappa_2 \operatorname{ctg} \theta_2.$$



Фиг. 3

К главе 11. Внутреннее устройство диэлектриков

- 11.1. Представим себе однородно поляризованный шар в виде двух равномерно заряженных шаров, полные заряды которых одинаковы по величине, но противоположны по знаку, а центры сдвинуты друг относительно друга на бесконечно малое расстояние. В решении задач 6.7 было показано, что электрическое поле такой системы совпадает с электрическим полем сферы, плотность поверхностных зарядов на которой меняется в виде $A \cos \theta$, где θ — угол, отсчитываемый от оси z (последнюю следует выбрать вдоль направления вектора поля-

ризации шара). При этом напряженность электрического поля вне этой сферы равна напряженности электрического поля диполя с дипольным моментом $p = (4\pi/3)Aa^3$:

$$E = \frac{pr^2 - 3r(r \cdot p)}{4\pi\epsilon_0 r^5}, \quad r > a.$$

Здесь вектор p , очевидно, совпадает с вектором полного дипольного момента равномерно поляризованного шара. Внутри же такого шара поле E , согласно решению задачи 6.7, равно

$$E = \frac{A}{3\epsilon_0} e_z = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 a^3}, \quad r \leq a.$$

11.2. $p_{He} = \frac{(\kappa - 1)}{N} \epsilon_0 E = 2,4 \cdot 10^{-37} \text{ кулон} \cdot \text{м}.$

11.3. Для водяного пара [см. «Лекции», вып. 5, уравнение (11.21)] $\kappa - 1 = N p_0^2 / 3\epsilon_0 kT$. Следовательно, температурная зависимость поляризуемости $\alpha = (\kappa - 1)/N$ имеет вид $\alpha = A/T$, где $A = p_0^2 / 3\epsilon_0 k$; N (число частиц в единице объема) можно найти из уравнения состояния идеального газа $p = NkT$ (p — давление пара, k — постоянная Больцмана). По данным таблицы, приведенной в условии задачи, $N = 1,138 \cdot 10^{26} \text{ м}^{-3}$. Для α имеем следующую таблицу значений:

$\alpha \cdot 10^{30}$	238	250	269	290
$(1/T) \cdot 10^5$	207	220	236	254

Если построить зависимость $\alpha = f(1/T)$, то экспериментальные точки лягутся на прямую, тангенс угла наклона которой равен $A = 1,12 \cdot 10^{-25}$. Отсюда $p_0 = \sqrt{3\epsilon_0 k A} = 2 \cdot 10^{-26} \text{ кулон} \cdot \text{м}.$

11.4. Энергетически выгодно, чтобы дипольные моменты располагались в одном направлении вдоль линии, соединяющей атомы. При этом в простом варианте задачи (для пары атомов) можно написать, что $E = (1/4\pi\epsilon_0)(2p/a^3)$. Используя затем соотношение $p = \alpha\epsilon_0 E$, находим ответ: $a^3 = \alpha/2\pi$.

В случае бесконечной цепочки атомов электрическое поле в месте расположения атома кислорода определяется выражением

$$\begin{aligned} E_O &= \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p_O}{(2na)^3} + \frac{2}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2p_{T1}}{(a + 2na)^3} = \\ &= \frac{1}{8\pi a^3} (p_O \zeta_1 + 8p_{T1} \zeta_2), \end{aligned}$$

где $\zeta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} (1/n^3) \approx 1,2$, а $\zeta_2 = \sum_{n=0}^{\infty} 1/(2n+1)^3$.

Поменяв атом кислорода на атом титана, получим второе уравнение. Легко сообразить, что

$$\zeta_1 = \zeta_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^3} = \zeta_2 + \frac{1}{8} \zeta_1,$$

откуда $\zeta_2 = (1/8)\zeta_1$. Определим $\alpha_1 = 8\pi a^3/\zeta_1$ и учтем, что $p_O = \alpha_O E_O$ и $p_{T1} = \alpha_{T1} E_{T1}$. Тогда можем написать систему уравнений

$$(\alpha_O - \alpha_1) E_O + 7\alpha_{T1} E_{T1} = 0,$$

$$7\alpha_O E_O + (\alpha_{T1} - \alpha_1) E_{T1} = 0.$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю, т. е. если

$$(\alpha_O - \alpha_1)(\alpha_{T1} - \alpha_1) - 49\alpha_{T1}\alpha_O = 0.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_1 = \frac{8\pi}{\zeta_1} a^3 = \frac{\alpha_O + \alpha_{T1} + \sqrt{(\alpha_O + \alpha_{T1})^2 + 192\alpha_O\alpha_{T1}}}{2}.$$

Заметим, что если положить $\alpha_O = \alpha_{T1}$, то наш ответ запишется в виде

$$\alpha_O = \frac{\pi}{\zeta_1} a^3.$$

Таким образом, в случае бесконечной цепочки одинаковых атомов необходима примерно в два раза меньшая поляризуемость, чем в случае двух атомов, чтобы система стала сегнетоэлектриком.

- 11.5. В однородном внешнем электрическом поле E каждый шарик поляризуется равномерно. Пусть P — вектор поляризации шарика. Внутри шарика равномерная поляризация создает однородное электрическое поле напряженностью $-P/3\epsilon_0$ [см. «Лекции», вып. 5, формула (11.24)]. Внутри каждого шарика (их взаимным влиянием друг на друга мы пренебрегаем в соответствии с условием задачи) суммарное электрическое поле $E_i = E - P/3\epsilon_0$. Поскольку $P = \epsilon_0(\kappa - 1)E_i$, имеем

$$P = \epsilon_0(\kappa - 1)E - \frac{\kappa - 1}{3}P,$$

откуда

$$P = \frac{3(\kappa - 1)}{\kappa + 2} \epsilon_0 E$$

Умножив P на объем шара, т. е. на $(4\pi/3)(d/2)^3$, получим полный дипольный момент равномерно поляризованного шарика

$$\mathcal{P} = \frac{4\pi(\kappa - 1)}{\kappa + 2} \left(\frac{d}{2}\right)^3 \epsilon_0 E.$$

Так как $D = E + P/(3d)^3\epsilon_0$, то для диэлектрической проницаемости решетки шариков получаем

$$\epsilon = 1 + \frac{4\pi(\kappa - 1)}{6^3(\kappa + 2)}.$$

К главе 12. Электростатические аналогии

- 12.1. Исходя из электростатической аналогии, нам нужно найти потенциал в центре тонкого равномерно заряженного кольца. Имеем

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a},$$

где $Q = \rho l a^2 b$ — полный заряд кольца. Переходя к задаче о распределении температуры, вспомним, что мы вычислили разность потенциалов между центром кольца и бесконечно удаленной точкой. Если потенциал на бесконечности равен φ_0 , то в центре кольца он равен

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} + \varphi_0.$$

Переходя к «температурным величинам», находим температуру в центре кольца (при таком переходе $\varphi \rightarrow T$, $\rho \rightarrow \epsilon_0 S/\kappa$; см. «Лекции», вып. 5, стр. 242):

$$T = \frac{W}{4\pi\kappa a} + T_0.$$

- 12.2. Используя аналогию с электростатической задачей, находим $T(r) = -(Sr^2/6\kappa) + D$, где $S = W/(4\pi/3)R^3$ — плотность источников тепла; $W = 8 \cdot 10^{20} \text{ Дж/год}$; R — радиус Земли. Константу D определим из условия $T(a) = T_0 = 2500^\circ \text{C}$, т. е. $D = T_0 + Sa^2/6\kappa$. Радиус a можно найти, положив приближенно температуру поверхности Земли равной нулю. Из этого условия следует

$$a = R \sqrt{1 - \frac{8\pi\kappa T_0 R}{W}} = 5870 \text{ км.}$$

- 12.3. а) Трехмерный случай: $\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z r^{n-1}$. Подставляя это выражение для φ в уравнение $\Delta\varphi = 0$, получаем в результате $\Delta\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-1)(n+2)b_n z r^{n-3} = 0$. Это уравнение имеет нетривиальное решение при условии, что коэффициенты b_1 и b_{-2} отличны от нуля. Следовательно,

$$\varphi = b_1 z + \frac{b_{-2} z}{r^3}.$$

- б) Двумерный случай: $\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z r^{n-1}$. В этом случае $\Delta\varphi = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (n-1)(n+1)c_n z r^{n-3} = 0$. Следовательно, лишь c_1 и c_{-1} отличны от нуля, и решение имеет вид

$$\varphi = c_1 z + c_{-1} z / \rho^2.$$

- 12.4. Задача математически аналогична задаче 7.1. Поэтому для T можно сразу написать решение, если в задаче 7.1 линейную плотность зарядов положить равной $\lambda = W\epsilon_0/\kappa t$:

$$T(r) = -\frac{W}{2\pi\kappa t} \ln \frac{r_2}{r_1} + D.$$

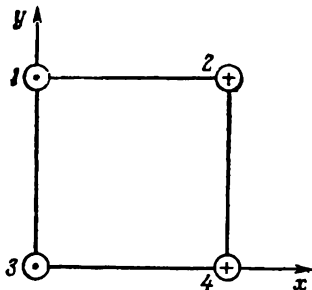
В этом выражении $r_2 = \sqrt{[x - (d/2)]^2 + y^2}$ и $r_1 = \sqrt{[x + (d/2)]^2 + y^2}$ — расстояния от произвольной точки до труб с источниками $+W$ и $-W$ соответственно (см. рисунок к решению задачи 7.1). Постоянная $D = T_0$ определяется из того условия, что в точках, достаточно удаленных от труб, температура равна T_0 . В точке с координатами $x = 100d$ и $y = 100d$ имеем $T = 20,5^\circ \text{C}$.

К главе 13. Магнитостатика

13.1. а) Напряженность магнитного поля, создаваемого током, текущим по бесконечному прямому проводу, на расстоянии r от последнего равна $\mathbf{B} = (I \times \mathbf{e}_r) / 2\pi\epsilon_0 c^2 r$, где I — вектор тока, равный по величине силе тока и направленный вдоль тока, а $\mathbf{e}_r$ — единичный вектор в направлении радиуса-вектора, расположенного в плоскости, перпендикулярной проводу. В центре квадрата компоненты вектора напряженности магнитного поля равны $B_y = 2I / \pi\epsilon_0 c^2 a = 8 \cdot 10^{-5}$ вебер/м², $B_x = 0$ (см. рисунок). Следовательно, вектор $\mathbf{B}$ направлен вертикально вверх.

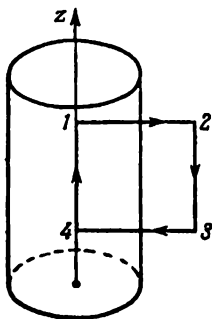
б) Сила, действующая на элемент длины левого нижнего из проводов с током, согласно закону $d\mathbf{F} = I (d\mathbf{l} \times \mathbf{B})$, дается выражением $\mathbf{f} = d\mathbf{F}/dl = I (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{B})$, где $\mathbf{e}_3$ — единичный вектор в направлении силы тока левого нижнего провода. Вычислим напряженность магнитного поля около левого нижнего провода (исключая, разумеется, поле, создаваемое этим проводом). Нетрудно убедиться,

что компоненты вектора $\mathbf{B}$ равны $B_x = B_0/2$, $B_y = 3B_0/2$, где $B_0 = I / 2\pi\epsilon_0 c^2 a$. Следовательно, $\mathbf{f} = (B_0 I / 2) (-3\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2)$, где $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ — единичные векторы в направлении осей x и y . Абсолютная величина этой силы $|\mathbf{f}| = B_0 I \sqrt{10}/2 = 6,3 \cdot 10^{-4}$ ньютон. Вектор этой силы составляет угол $161,7^\circ$ с осью x .



13.2. При вращении цилиндра образуются круговые токи с плотностью

$$\mathbf{j} = \frac{1}{2} P_0 \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$



Из соображений симметрии ясно, что в точках, достаточно удаленных от концов цилиндра, магнитное поле направлено вдоль его оси.

Выберем контуры интегрирования, как показано на рисунке и воспользуемся теоремой Стокса. Находим, что вне цилиндра $\mathbf{B} = 0$. Поле на оси цилиндра также равно нулю.

$$B(0) = \frac{P_0 \omega a^2}{4\epsilon_0 c^2}.$$

Направление вектора $\mathbf{B}$ совпадает с направлением угловой скорости,

- 13.3. Плотность токов j найдем из условия однородности тока по сечению. Воспользовавшись тем, что циркуляция вектора B по замкнутому контуру равна

$$\oint B \cdot dl = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \int j \cdot dS,$$

получим

$$a) \quad B = \frac{Ir}{2\pi\epsilon_0 c^2 a^2}, \quad 0 < r < a,$$

$$б) \quad B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r}, \quad a < r < b,$$

$$в) \quad B = \frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2 r} \frac{c^2 - r^2}{c^2 - b^2}, \quad b < r < c,$$

$$г) \quad B = 0, \quad r > c.$$

- 13.4. Под действием силы Лоренца $q_e \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ электрон движется по окружности. Ее радиус определим из условия, что сила Лоренца равна массе электрона, умноженной на центростремительное ускорение:

$$q_e v_0 B = \frac{m_e v_0^2}{r};$$

здесь v_0 — начальная скорость электрона, определяемая из соотношения $v_0 = \sqrt{2E/m_e}$. При $E = 3$ кэВ получаем $v_0 = 3,3 \cdot 10^7$ м/сек. В своем движении в узкой части трубки электрон опишет дугу, а затем полетит по касательной к этой дуге (ускорением электрона в электрическом поле пренебрегается). Из рисунка видно, что максимальный угол отклонения электронов (в предельном случае на половину экрана) определяется длиной узкой части трубки l_1 , вертикальным размером экрана D и длиной широкой части трубки l . Можно написать следующее равенство:

$$\frac{D}{2} - a = l \cdot \operatorname{tg} \varphi_{\text{макс}}.$$

Из рисунка также ясно, что $\sin \varphi_{\text{макс}} = l_1/r$ и $a = r(1 - \cos \varphi_{\text{макс}})$. Отсюда следует, что величину $\varphi_{\text{макс}}$ можно определить из уравнения

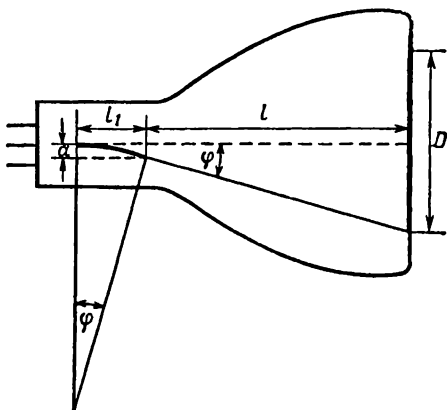
$$\operatorname{tg} \varphi_{\text{макс}} = \frac{D}{2l} - \frac{l_1}{l} \operatorname{tg} \frac{\varphi_{\text{макс}}}{2}.$$

Поскольку $l_1 \lesssim l$, то $\operatorname{tg} \varphi_{\text{макс}} \approx D/2l$. В таком приближении радиус дуги электрона равен $r = l_1/\sin \varphi_{\text{макс}} = l_1 \sqrt{1 + (4l^2/D^2)}$. Следовательно,

$$B = mv_0/q_e l_1 \sqrt{1 + (4l^2/D^2)}$$

Оценим величину B для следующих параметров трубки: $D = 30$ см, $l = 30$ см, $l_1 = 5$ см. Находим $B = 3,6 \cdot 10^{-3}$ вебер/м². Число ампер-витков на единицу длины (м) соленоида вычисляем по формуле $B = nI/\epsilon_0 c^2$ [см. «Лекции», вып. 5, формула (13.19)]. Получаем $nI = \epsilon_0 c^2 B = 2,8 \cdot 10^3$ ампер-витков.

Электрическое поле ускоряет электроны после их отклонения в магнитном поле и, следовательно, увеличивает составляющую скорости по направлению к экрану. Это приводит к уменьшению угла φ между направлением движения электронов и осью трубки. Поэтому,



для того чтобы электроны могли достичь края экрана, магнитное поле должно больше отклонить электронный луч, т. е. быть сильнее. Этого можно добиться увеличением n/l . Следовательно, вычисленные выше значения B и n/l необходимо увеличить.

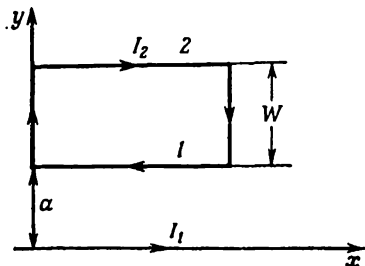
- 13.5. а) При определении силы, действующей на рамку с током, будем исходить из того, что на элемент тока длиной ds действует сила, равная $d\mathbf{F} = I_2 ds \times \mathbf{B}$. Проинтегрируем это выражение по контуру рамки. Ясно, что силы, действующие на участки рамки, перпендикулярные проводу, одинаковы по величине и противоположны по направлению. Их результирующая равна нулю. Сила, реально действующая на рамку, равна сумме сил, действующих на участки, параллельные проводу. Поскольку магнитное поле, создаваемое проводом на расстоянии y от него, определяется выражением

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{I_1}{y} \mathbf{e}_z,$$

то

$$\mathbf{F} = I_2 \left\{ \int_1 ds \times \mathbf{B} + \int_2 ds \times \mathbf{B} \right\} = \frac{I_1 I_2}{2\pi\epsilon_0 c^2} \mathbf{e}_y \frac{wl}{a(a+w)}.$$

Сила, действующая на провод, имеет ту же величину, что и найденная, но противоположное ей направление.



- б) Нетрудно убедиться, что момент сил, действующих на рамку, определяемый выражением

$$\mathbf{M} = I_2 \oint \mathbf{r} \times ds \times \mathbf{B}, \quad \text{равен нулю.}$$

- 13.6. Задача легко решается, если рассмотреть два фиктивных тока: один с плотностью $+\mathbf{j}$, а другой с плотностью $-\mathbf{j}$, «протекающих» по полости так, чтобы результирующий ток через полость был равен нулю. При этом нетрудно найти магнитное поле на оси полости. Оно равно $\mathbf{B} = (1/2\epsilon_0 c^2) \mathbf{j} \times \mathbf{d}$, где $\mathbf{d}$ — радиус-вектор, соединяющий центр сечения стержня с центром сечения полости.

К главе 14. Магнитное поле в разных случаях

- 14.1. а) Для определения векторного потенциала в точках, удаленных от поверхности пленки на расстояние, гораздо меньшее ее размеров, воспользуемся сформулированным в «Лекциях» (вып. 5, стр. 286) принципом: i -я компонента векторного потенциала, возникающая от плотности тока $\mathbf{j}$, точно такая же, как электрический потенциал ϕ , созданный плотностью зарядов $\rho = \mathbf{j}/c^2$. Поскольку, согласно условию задачи, пленку можно считать неограниченной во всех направлениях, воспользуемся уже решенной задачей о поле равномерно заряженной плоскости. Выберем систему координат, направив ось x вдоль вектора $\mathbf{v}$, а ось z — перпендикулярно плоскости пленки. В такой системе координат поверхностный ток имеет компоненту x , отличную от нуля; следовательно, $A_y = A_z = 0$. Электрическое поле равномерно заряженной плоскости, согласно «Лекциям» (вып. 5, стр. 97), равно

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \mathbf{e}_z,$$

где $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор в направлении оси z . Интегрируя соотношение $E_z = -\partial\phi/\partial z$, находим электрический потенциал $\phi = -(\sigma/2\epsilon_0)z$ (постоянную интегрирования выбираем равной нулю). Используя сформулированный выше принцип, находим

$$A_x = -\frac{\sigma v}{2\epsilon_0 c^2} z, \quad A_y = A_z = 0.$$

Так как $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, то, проделав необходимое дифференцирование, находим $B_x = 0$, $B_y = -\sigma v/2\epsilon_0 c^2$, $B_z = 0$. В векторной форме

$$\mathbf{B} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0 c^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{e}_z).$$

- 14.2. Для решения задачи удобно воспользоваться законом Био — Савара

$$d\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} (d\mathbf{s} \times \mathbf{r}).$$

- В величину магнитного поля в центре полукруга прямолинейные участки провода вносят нулевой вклад.
- Поле направлено перпендикулярно плоскости рисунка и равно $B = 1/4\epsilon_0 c^2 r$.
- Магнитное поле, создаваемое всем проводом, равно найденному в п. (б) данной задачи.

- 14.3. Если воспользоваться законом Био — Савара, то магнитные поля, создаваемые витками в точке P (см. рисунок), можно найти простым интегрированием. Получаем: $B_{x1} = I a^2/2\epsilon_0 c^2 r_1^3$ и $B_{x2} = I a^2/2\epsilon_0 c^2 r_2^3$, где $r_1 = \sqrt{a^2 + [(b/2) - x]^2}$ и $r_2 = \sqrt{a^2 + [(b/2) + x]^2}$.

а) Полное поле в точке P дается выражением

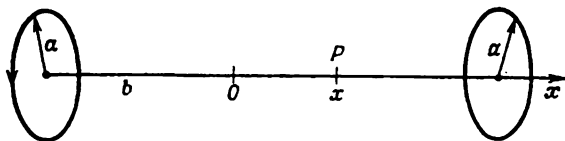
$$B_x = B_{x1} + B_{x2} = \frac{Ia^2}{2\epsilon_0 c^2 r_1^2} \left\{ \left[a^2 + \left(\frac{b}{2} - x \right)^2 \right]^{-3/2} + \left[a^2 + \left(\frac{b}{2} + x \right)^2 \right]^{-3/2} \right\}.$$

б) Считая параметр x/r_0 [где $r_0 = \sqrt{a^2 + (b^2/4)}$] малым, разложим полученное выражение в ряд Тейлора. Нетрудно показать, что

$$B = \frac{Ia^2}{\epsilon_0 c^2 r_0^3} \left[1 + \left(\frac{15}{4} \frac{b^2}{r_0^4} - \frac{3}{r_0^2} \right) \frac{x^2}{2} \right].$$

в) Слагаемое с x^2 обращается в нуль при условии $5b^2/4 = r_0^2$, т. е. когда $a = b$.

г) Если $a = b$, то магнитное поле равно $B = 8I/5^{3/2} a \epsilon_0 c^2$.

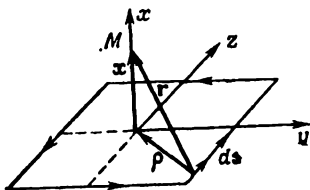


14.4. а) Выберем оси координат, как показано на рисунке. Согласно закону Био — Савара, имеем

$$\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3};$$

здесь интегрирование ведется по всем сторонам рамки. Если представить вектор $\mathbf{r}$ в виде суммы двух векторов (один из которых направлен вдоль оси x и имеет длину, равную x , а другой расположен в плоскости yz), то можно написать

$$\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\left(\oint \frac{d\mathbf{s}}{r^3} \times \mathbf{x} \right) + \oint \frac{d\mathbf{s} \times \boldsymbol{\rho}}{r^3} \right].$$



Ясно, что первый интеграл в квадратной скобке равен нулю в силу симметрии рамки, поскольку для любого $d\mathbf{s}$ всегда найдется на рамке другой участок, расположенный на таком же расстоянии r от точки M , но с противоположным направлением $d\mathbf{s}$. Что же касается второго интеграла, то в нем вектор $d\mathbf{s} \times \boldsymbol{\rho}$ всегда направлен вдоль оси x , и, следовательно, магнитное поле рамки перпендикулярно плоскости рамки. Из рисунка видно, что $(d\mathbf{s} \times \boldsymbol{\rho})_x = (a/2) dz$.

Учитывая, что интеграл по замкнутому контуру в условиях данной задачи равен восьми интегралам вдоль отрезка $0 \leq z \leq a/2$,

для которого $r^2 = x^2 + z^2 + a^2/4$, находим

$$B_x = \frac{Ia}{\pi\epsilon_0 c^2} \int_0^{a/2} \frac{dz}{(a^2/4 + x^2 + z^2)^{3/2}}.$$

- Вычислив этот интеграл, получим требуемый в задаче ответ.
 б) В этом пункте задачи требуется фактически найти закон Био — Савара из общего интегрального выражения для векторного потенциала. Для нашей задачи это выражение принимает вид

$$\mathbf{A} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \frac{d\mathbf{s}}{r}.$$

По соображениям, изложенным в п. (а), векторный потенциал в точке M равен нулю. Вычислим $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Воспользовавшись соотношениями, приведенными в примечании к задаче, запишем выражение для магнитного поля в произвольной точке наблюдения:

$$\mathbf{B} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \nabla \times \left(\oint \frac{d\mathbf{s}}{r} \right) = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \left(\nabla \times \frac{d\mathbf{s}}{r} \right).$$

В последнем интеграле дифференцирование производится по координатам точки наблюдения. При этом дифференцировании вектор $d\mathbf{s}$ следует считать постоянным. Здесь удобно воспользоваться теми соотношениями, которые были получены в решении задачи 2.3. Получим

$$\nabla \times \frac{d\mathbf{s}}{r} = \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \times d\mathbf{s} = \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3}.$$

Следовательно, мы приходим к закону Био — Савара, использованному в п. (а).

- 14.5. Чтобы определить напряженность магнитного поля, вычислим вначале векторный потенциал в некоторой точке P с координатами x, y, z , расположенной вблизи оси кольца. Выберем оси координат так, чтобы ось z совпадала с осью кольца. Воспользуемся интегральным выражением для векторного потенциала

$$\mathbf{A} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2} \oint \frac{d\mathbf{s}}{r},$$

где $r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$, x' и y' — координаты элемента $d\mathbf{s}$ на кольце $[(x')^2 + (y')^2 = a^2]$. Считая $x, y \ll a$, приближенно запишем

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2xx' - 2yy'} \approx \sqrt{z^2 + a^2} \left(1 - \frac{xx' + yy'}{z^2 + a^2} \right).$$

В том же приближении, очевидно,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} + \frac{xx' + yy'}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

В силу того, что $\oint d\mathbf{s} = 0$, имеем

$$\mathbf{A} = \frac{I}{4\pi\epsilon_0 c^2 (z^2 + a^2)^{3/2}} \oint (xx' + yy') d\mathbf{s}.$$

Поскольку в направлении оси z токов нет, то $A_z = 0$. Учитывая следующие соотношения:

$$\oint x' ds_x = 0, \quad \oint y' ds_x = -\pi a^2,$$

$$\oint x' ds_y = \pi a^2, \quad \oint y' ds_y = 0,$$

находим

$$A_x = -\frac{I\pi a^2}{4\pi e_0 c^2 (z^2 + a^2)^{3/2}} y,$$

$$A_y = \frac{I\pi a^2}{4\pi e_0 c^2 (z^2 + a^2)^{3/2}} x.$$

Вычисляя напряженность магнитного поля $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$, находим окончательно $B_x = B_y = 0$:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{I}{2e_0 c^2} \frac{a^2}{(z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

- 44.6. Полный заряд проводящей сферы связан с потенциалом V соотношением $Q = 4\pi e_0 V a$. Поэтому плотность поверхностных зарядов равна $\sigma = e_0 V/a$. Для определения векторного потенциала воспользуемся общим интегральным представлением; однако при этом учтем, что возникающие при вращении сферы токи будут поверхностными и, следовательно, в условиях задачи надо заменить $\int dV$ на $(\sigma a \boldsymbol{\omega} \times d\mathbf{a})$ где $d\mathbf{a}$ — вектор, по величине равный элементарной площадке da и направленный перпендикулярно этой площадке. При этом векторный потенциал

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi e_0 c^2} \int \frac{\mathbf{j} dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{\sigma a}{4\pi e_0 c^2} \left(\boldsymbol{\omega} \times \int \frac{d\mathbf{a}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right).$$

Преобразуя по теореме Гаусса поверхностный интеграл в объемный, имеем

$$\frac{1}{4\pi e_0} \int \frac{d\mathbf{a}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = -\frac{1}{4\pi e_0} \nabla \int \frac{dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \mathbf{E}_0;$$

здесь вектор $\mathbf{E}_0$ — напряженность поля равномерно заряженного шара:

$$\mathbf{E}_0 = \begin{cases} \frac{1}{3e_0} \mathbf{r}, & r < a, \\ \frac{a^3}{3e_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}, & r > a. \end{cases}$$

Отсюда

$$\mathbf{A} = \begin{cases} \frac{\sigma a}{3e_0 c^2} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}), & r < a, \\ \frac{\sigma a^4}{3e_0 c^2} \frac{(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})}{r^3}, & r > a. \end{cases}$$

Учитывая, что $\nabla \times (\omega \times r) = 2\omega$, находим магнитное поле $B = \nabla \times A$:

$$B = \begin{cases} \frac{2V}{3c^2} \omega, & r < a, \\ \frac{3r(\mu \cdot r) - \mu r^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3}, & r > a; \end{cases}$$

здесь

$$\mu = \frac{4\pi\epsilon_0}{3} V a^3 \omega.$$

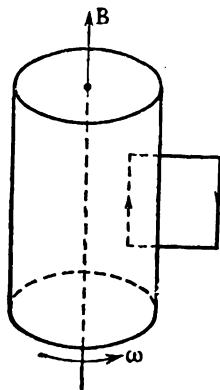
- 14.7. а) Если отрезком проволоки соединить ось цилиндра с его поверхностью, то при движении провода в магнитном поле возникнет сила $q(v \times B)$, которая приведет к появлению зарядов на концах провода. Концы проводов будут заряжаться до тех пор, пока электрическое поле E не уравнивает $v \times B$, т. е. при $E(x) = \omega x B$.

При этом разность потенциалов на концах провода $V = \int_0^b E(x) \times$

$\times dx = (\omega b^2/2)B$, где b — радиус цилиндра. Магнитное поле внутри цилиндра (вне его оно равно нулю) легко найти с помощью теоремы Стокса, выбирая контур интегрирования так, как показано на рисунке: $B = \lambda\omega/2\pi\epsilon_0 c^2$. Отсюда ответ:

$$V = \left(\frac{v}{c}\right)^2 \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0}.$$

- б) Пусть в нашем распоряжении имеется очень чувствительный вольтметр, с помощью которого можно измерять разности потенциалов порядка 10^{-10} в. Из найденного выражения для V следует, что величина V тем выше, чем больше λ — заряд, приходящийся на единицу длины цилиндра. Пусть плотность поверхностных зарядов σ на цилиндре достаточно велика, скажем такая же, как на проводящей сфере радиусом $a = 1$ м, заряженной до потенциала $V_0 = 10^6$ в. Тогда $\sigma = \epsilon_0 V_0/a$ и $\lambda = 2\pi\epsilon_0 V b/a$. Подставляя это значение λ в выражение для V и учитывая, что $v = \omega b$, где $\omega = 10^{-4}$ сек $^{-1}$, находим $b = [(2c^2 a/\omega^2)(V/V_0)]^{1/2} = 1200$ м, что нереально.



К главе 15. Векторный потенциал

15.1. а) На границе раздела двух сред нормальная составляющая магнитного поля должна быть непрерывной (это условие является следствием уравнения $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$). Внутри сверхпроводника $\mathbf{B} = 0$, поэтому на его поверхности нормальная составляющая магнитного поля также равна нулю, т. е. поле снаружи сверхпроводника везде касательно к поверхности последнего — магнитные силовые линии огибают сверхпроводник.

б) Магнитное поле в любой точке A , расположенной над сверхпроводником, можно найти, введя изображение магнитного момента (см. рисунок), такое, что $|\mu_1| = |\mu_2|$. Нетрудно убедиться, что при этом выполняется условие равенства нулю нормальной составляющей магнитного поля в любой точке границы раздела. Магнитное поле в произвольной точке A

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2;$$

здесь

$$\mathbf{B}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{3\mathbf{R}_1 (\mathbf{R}_1 \cdot \mu_1) - \mu_1 R_1^2}{R_1^5} \right],$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{3\mathbf{R}_2 (\mathbf{R}_2 \cdot \mu_2) - \mu_2 R_2^2}{R_2^5} \right].$$

в) Для определения вращающего момента и равновесных углов θ вычислим «механическую» энергию магнитного момента в магнитном поле, создаваемом сверхпроводником:

$$U_{\text{мех}} = -(\mu_1 \cdot \mathbf{B}_2) = -\frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3} (3 \cos^2 \theta - \cos 2\theta).$$

Действующий на магнитный диполь вращающий момент равен

$$M = \frac{\partial U_{\text{мех}}}{\partial \theta} = -\frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3} \sin 2\theta.$$

В векторном виде вращающий момент можно записать следующим образом:

$$\mathbf{M} = \mu_1 \times \mathbf{B}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{3\mu_1 \times \mathbf{R}_0 (\mathbf{R}_0 \cdot \mu_2) - (\mu_1 \times \mu_2) R_0^2}{R_0^5} \right].$$

Определяя равновесные значения θ из условия $\partial U_{\text{мех}}/\partial\theta = 0$, находим $\theta = 0, \pi/2, 3\pi/2, \pi$. Для найденных значений углов энергия магнитного диполя равна

$$U_{\text{мех}}|_{\theta=0} = U_{\text{мех}}|_{\theta=\pi} = \frac{2\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3};$$

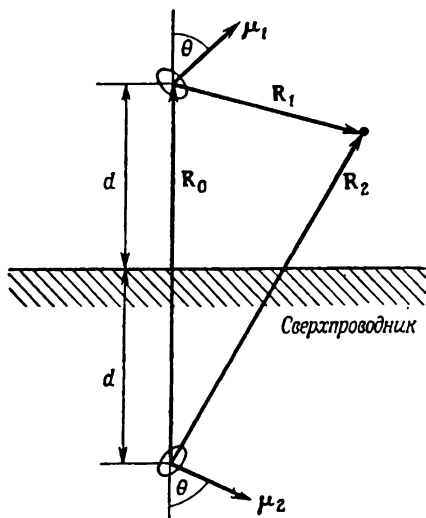
$$U_{\text{мех}}|_{\theta=\pi/2} = U_{\text{мех}}|_{\theta=3\pi/2} = \frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3}.$$

Следовательно, при $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$ равновесие будет устойчивым, а при $\theta = 0, \pi$ — неустойчивым.

- г) Сила действующая на магнитный диполь, определяется выражением $F = -\nabla U_{\text{мех}}$. При фиксированном угле θ сила действует в направлении, перпендикулярном поверхности сверхпроводника, и равна по величине

$$F = -\frac{3\mu^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^4} (3\cos^2\theta - \cos 2\theta)$$

При устойчивом равновесии, т. е. при $\theta = \pi/2$ и $3\pi/2$, $F = 3\mu^2/4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^4$. Сила будет отталкивать диполь от поверхности сверхпроводника



К главе 17. Закон индукции

- 17.1. Применяя закон индукции и считая поле $\mathbf{B}$ однородным внутри цилиндра, нетрудно найти величину электрического поля [см. «Лекции», вып. 6, формула (17.3), стр. 53], силовые линии которого представляют собой концентрические окружности:

$$E_t = -\frac{r}{2} \frac{dB}{dt}.$$

Мгновенное ускорение следует определить из уравнения движения: $m_e \mathbf{w} = q_e [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}]$. Поскольку в начальный момент времени скорость заряда равна нулю, то $\mathbf{w} = (q_e/m_e) \mathbf{E}_t = -(q_e r/2m_e) (dB/dt)$. Ускорения в точках P_1 и P_3 одинаковы по величине и равны $q_e a (dB/dt)/2m_e = 4.4 \cdot 10^7$ м/сек², но противоположны по направлению. В точке P_2 ускорение направлено в правую сторону (см. рисунок в условии задачи) перпендикулярно отрезку P_1P_3 . Ускорение в точке P_2 равно нулю.

- 17.2. Магнитный поток через полукольцо равен $\Phi = BS \cos \alpha$, где $\alpha = \omega t$ — угол, который образует плоскость полукольца с силовыми линиями, ω — угловая скорость вращения, $S = \pi r^2/2$ — площадь полукольца. Наведенная э. д. с. равна

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = \frac{B\pi r^2 \omega}{2} \sin \omega t,$$

а ток в цепи

$$I = \frac{B\pi r^2 \omega}{2R_M} \sin \omega t.$$

Следовательно, амплитуды э. д. с. и тока равны

$$\mathcal{E}_{\text{макс}} = \frac{B\pi r^2 \omega}{2} \text{ и } I_{\text{макс}} = \frac{B\pi r^2 \omega}{2R_M}.$$

- 17.3. При $R \gg a$ магнитное поле, создаваемое витком (1),

$$B = \frac{3(\mu \cdot R) R}{R^5} = \frac{\mu}{R^3},$$

где $\mu = I\pi a^2 n_1$; n_1 — единичный вектор нормали к плоскости витка (1). Если ввести n_2 — аналогичный вектор для витка (2), то магнитный поток через второй виток равен

$$\Phi = (B \cdot S_2) = \frac{I(\pi a^2)^2}{R^3} \left[(n_1 \cdot n_2) - \frac{3(R \cdot n_1)(R \cdot n_2)}{R^2} \right].$$

Пусть в момент времени t вектор n_2 составляет угол α с векторами n_1 и R , а $n_1 \parallel R$. Следовательно, наведенная в витке (2) э. д. с. равна

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{2I}{R^3} (\pi a^2)^2 \omega \sin \omega t.$$

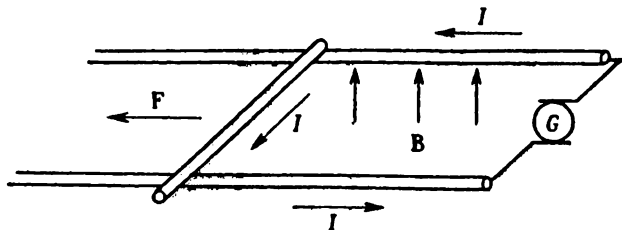
- 17.4. а) Провод движется равноускоренно. Действительно, из закона Ампера сила, действующая на провод, равна IBd . Решая уравнение движения для провода с начальным условием $v(t)|_{t=0} = 0$, получаем $v(t) = (IBd/m)t$.
б) Если цепь обладает сопротивлением r_0 , то, пренебрегая полем, создаваемым током, находим

$$Ir_0 = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}} = \mathcal{E} - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \mathcal{E} - vBd,$$

где $\mathcal{E}$ — э. д. с., создаваемая электрической батареей.

Так как провод движется равномерно, то действующая на него сила (сила Ампера) равна нулю. Отсюда $I = 0$ и, следовательно, $v_{\text{отст}} = \mathcal{E}/Bd$.

- в) Ток равен нулю.



- 17.5. Электрическая энергия цепи с двумя катушками дается выражением [см. «Лекции», вып. 6, формула (17.38), стр. 71]:

$$U = \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 I_1^2 + \frac{1}{2} \mathcal{L}_2 I_2^2 - \mathfrak{M} I_1 I_2,$$

где I_1, I_2 — токи в катушках, $\mathfrak{M}$ — коэффициент взаимной индукции. Поскольку по условию задачи $I_1 = I_2 = I$, то электрическую энергию цепи можно представить в виде $U = (1/2) \mathcal{L} I^2$, где $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 - 2\mathfrak{M}$. Если витки одной катушки перемотать в другую сторону, то изменится знак у $\mathfrak{M}$.

- 17.6. а) Напряженность магнитного поля внутри кабеля найдем с помощью теоремы Стокса. При этом учтем, что в силу симметрии задачи силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности. В каждой точке силовой линии радиусом r напряженность магнитного поля $B = I/2\pi\epsilon_0 c^2 r$. Чтобы найти индуктивность кабеля, определим энергию магнитного поля $U = (\epsilon_0 c^2/2) \int B^2 dV$, приходящуюся на единицу длины кабеля [см. «Лекции», вып. 6, формула (17.48), стр. 75]. Разделим область между цилиндрами на цилиндрические слои толщиной dr и учтем, что объем такого слоя, расположенного на расстоянии r от оси кабеля, равен $dV = 2\pi r dr$, после чего найдем

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \int_a^b \frac{2\pi r dr}{r^2} = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 2\pi \ln \frac{b}{a}.$$

Приравнявая это выражение величине $(1/2) \mathcal{L} I^2$, найдем индуктивность, приходящуюся на единицу длины кабеля:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}.$$

- б) В этом случае напряженность магнитного поля B в области $a < r < b$ равна напряженности, найденной в п. (а). В области $0 < r < a$ с помощью теоремы Стокса находим $B = Ir/2\pi\epsilon_0 c^2 a^2$. Вычислим далее энергию магнитного поля во внутреннем проводе, приходящуюся на единицу длины. Поступая так же, как и в п. (а), получаем

$$U_1 = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{I}{2\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 \frac{2\pi}{4}.$$

Сложим это выражение с величиной U , найденной в п. (а), и приравняем сумму величине $(1/2) \mathcal{L} I^2$. Тогда

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 c^2} \left[\ln \frac{b}{a} + \frac{1}{4} \right].$$

Сравнивая выражения для $\mathcal{L}$, найденные в п. (а) и (б), видим, что если $b \gg a$, то результат слабо зависит от распределения тока по сечению центрального провода.

- 17.7. а) Напряженность магнитного поля внутри тороидальной катушки можно найти по теореме Стокса, если в качестве стоксовой поверхности взять поверхность, натянутую на окружность радиусом r . Для $b < r < b + a$ имеем

$$B = \frac{NI}{2\pi\epsilon_0 c^2 r};$$

здесь N — число витков обмотки, I — сила тока в обмотке. Далее вычислим энергию магнитного поля внутри тороидальной катушки. Интегрируя по объему тороида, получаем

$$U = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \left(\frac{NI}{2\pi\epsilon_0 c^2} \right)^2 2\pi a \ln \frac{(b+a)}{b}.$$

Приравняв U величине $(1/2)\mathcal{L}I^2$, окончательно находим

$$\mathcal{L} = \frac{N^2 a}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

- б) Для определения взаимной индуктивности системы, состоящей из тороидальной катушки и прямолинейного провода, вычислим создаваемый проводом магнитный поток Φ_0 через поперечное сечение тороида. Поскольку напряженность магнитного поля B , создаваемая прямолинейным проводником на расстоянии r от него, равна $B = I_1/2\pi\epsilon_0 c^2 r$ (силовые линии поля B представляют собой концентрические окружности), то магнитный поток через один виток тороидальной катушки дается выражением

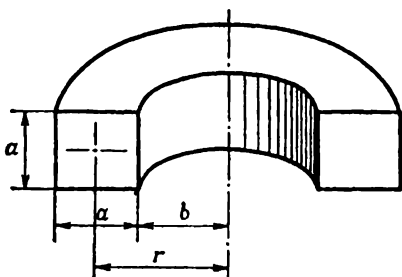
$$\Phi_0 = \int \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \frac{I_1 a}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right),$$

где I_1 — сила тока в проводе. Поскольку в катушке N витков, поток нужно умножить на N . Приравняв поток Φ_0 величине $\mathcal{M}I_1$,

где $\mathcal{M}$ — взаимная индуктивность, находим

$$\mathcal{M} = \frac{aN}{2\pi\epsilon_0 c^2} \ln \left(1 + \frac{a}{b} \right).$$

- в) Из п. (а) и (б) следует, что $\mathcal{L}/\mathcal{M} = N$.



- 17.8. а) Как показано § 5 гл. 14 «Лекций» (вып. 5, стр. 293), магнитное поле, создаваемое витком с током на большом расстоянии от него, подобно электрическому полю диполя с моментом, перпендикулярным плоскости витка, т. е. магнитное поле, создаваемое витком 1 в центре витка 2, дается выражением

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{3\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu}_1 \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}_1}{r^3} \right],$$

где $\boldsymbol{\mu}_1 = I\pi a^2 \mathbf{n}_1$, а $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, соединяющий центры витков. Так как вблизи витка 2 поле $\mathbf{B}$ можно считать однородным, магнитный поток вектора $\mathbf{B}$ через него равен $\pi a^2 (\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}_2)$. Приравняв последнее выражение величине $\mathcal{M}_{12}I$, находим

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{(\pi a^2)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left[\frac{(\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2)}{r^3} - 3 \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_1)(\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}_2)}{r^5} \right]. \quad (1)$$

Взаимная индуктивность выражается через углы α_1 и α_2 (см. рисунок в условии задачи) следующим образом:

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{(\pi a^2)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^3} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2].$$

- б) Сила взаимодействия витков [см. «Лекции», вып. 6, формула (17.39), стр. 72] равна $F = -I^2 \nabla \mathcal{M}_{12}$. Используя выражение (1), получаем

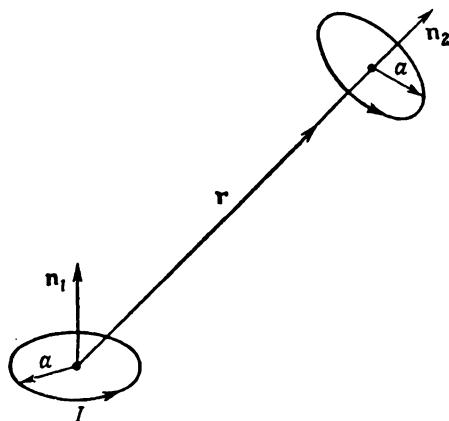
$$F = \frac{(\pi a^2 I)^2}{4\pi \epsilon_0 c^2} \left[\left(\frac{3(n_1 \cdot n_2)}{r^4} - 15 \frac{(n_1 \cdot r)(n_2 \cdot r)}{r^6} \right) \frac{r}{r} + \right. \\ \left. + \frac{3}{r^5} (n_1(n_2 \cdot r) + n_2(n_1 \cdot r)) \right].$$

Составляющая силы, перпендикулярная плоскости рисунка, равна нулю. Проекция $F_{\parallel}$ и $F_{\perp}$ силы F на линию, соединяющую центры витков, и на перпендикулярную ей ось (на рисунке направим эту ось вверх) соответственно равны

$$F_{\parallel} = \frac{3(\pi a^2 I)^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 r^4} [\cos(\alpha_1 - \alpha_2) - 3 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2],$$

$$F_{\perp} = \frac{3(\pi a^2 I)^2}{4\pi \epsilon_0 c^2 r^4} \sin(\alpha_1 + \alpha_2).$$

- в) Если изменить направления токов сразу в двух витках, то сила не изменится. При изменении направления тока только в одном витке знак силы меняется, поскольку меняется направление одного из векторов n на противоположное.



- 17.9. Чтобы найти напряженность магнитного поля на оси соленоида, создаваемую одним его витком, определим вначале вектор B_0 на оси. Воспользовавшись результатом задачи 14.5, найдем, что на расстоянии z от центра витка напряженность магнитного поля на его оси равна

$$B_0 = \frac{I r_2^2}{2\epsilon_0 c^2 (z^2 + r_2^2)^{3/2}}.$$

При этом вектор B_0 направлен вдоль оси витка. Чтобы найти напряженность магнитного поля в центре соленоида, создаваемого всеми его витками, проинтегрируем найденное выражение по длине соленоида, введя линейную плотность тока IN/l . Заменяя в приведенном

выше выражении для B_0 силу тока на $INdz/l$ и интегрируя по z от $-l/2$ до $+l/2$, находим магнитное поле в центре соленоида:

$$B = \frac{INr_2^2}{2e_0c^2l} \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{dz}{(z^2 + r_2^2)^{3/2}} = \frac{IN}{e_0c^2l} \frac{l/2r_2}{[1 + (l/2r_2)^2]^{1/2}}.$$

Нетрудно видеть, что если длина соленоида становится бесконечно большой, то выражение для B переходит в найденное в «Лекциях» (§ 5 гл. 13, вып. 5, стр. 268) выражение для магнитного поля внутри длинного соленоида. В силу того, что $r_2 \gg r_1$, поле B в окрестности петли (т. е. в области $0 < r < r_1$) можно считать однородным. Вычисляя магнитный поток $\Phi = B\pi r_1^2$ через петлю, находим

$$\mathfrak{M}_{12} = \frac{N\pi r_1^2}{e_0c^2l} \frac{l/2r_2}{\sqrt{1 + (l/2r_2)^2}}.$$

Вычислим теперь $\mathfrak{M}_{21}$. Поскольку размеры витка малы, его можно рассматривать как магнитный диполь. Поле магнитного диполя дается выражением (см. § 5 гл. 14 «Лекций», вып. 5)

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi e_0c^2} \left(3 \frac{\mathbf{r}(\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{r})}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3} \right),$$

где $\boldsymbol{\mu} = I_1\pi r_1^2 \mathbf{e}_z$; $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор вдоль оси соленоида (ее выбираем в качестве оси z); I_1 — сила тока в витке. Вычислим поток вектора $\mathbf{B}$ через один виток соленоида, расположенный на расстоянии z от центра витка:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \int B_z da = \frac{\mu}{4\pi e_0c^2} \int_0^{r_1} 2\pi\rho d\rho \left[\frac{z^2}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(\rho^2 + z^2)^{1/2}} \right] = \\ &= \frac{I_1\pi r_1^2}{2e_0c^2} \frac{r_2^2}{(r_2^2 + z^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Далее найдем магнитный поток через все витки соленоида. Для этого просуммируем найденное нами выражение по всем виткам. Вводя плотность витков Ndz/l и интегрируя по z от $-l/2$ до $+l/2$, находим

$$\Phi = I_1 \frac{N\pi r_1^2 r_2^2}{2e_0c^2l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{dz}{(z^2 + r_2^2)^{3/2}} = \mathfrak{M}_{21} I_1.$$

Вычисляя найденный интеграл, получаем выражение для $\mathfrak{M}_{21}$, которое, как нетрудно видеть, совпадает с $\mathfrak{M}_{12}$, т. е. $\mathfrak{M}_{12} = \mathfrak{M}_{21}$.

- 17.10. Если пренебречь магнитным полем, создаваемым проводом, то наведенная в нем э. д. с. равна

$$\mathcal{E} = - \frac{\partial \Phi}{\partial t} = - Bvl.$$

Отсюда $I = \mathcal{E}/R = -Bvl/R = -10^{-3}$ а. Если не пренебрегать магнитным полем, создаваемым движущимся проводником, ток в цепи

уменьшится. Ответ по величине не изменится, если магнит, создающий поле B , будет двигаться со скоростью v в ту же сторону, что и провод, так как в этом случае можно считать, что сопротивление R движется вправо со скоростью v и, следовательно, магнитный поток через цепь будет меняться с прежней скоростью. Поскольку размеры цепи уменьшаются со временем, коэффициент самоиндукции также будет уменьшаться.

- 17.11. Механическая сила, действующая между витками, и момент сил, действующий на виток B , определяются выражениями (см. «Лекции», вып. 6, стр. 72)

$$F = -I_A I_B \frac{\partial \mathcal{M}_{AB}}{\partial d} \quad \text{и} \quad M = -I_A I_B \frac{\partial \mathcal{M}_{AB}}{\partial \alpha},$$

где d — расстояние между центрами витков; α — угол, который составляет нормаль к витку B с осью, проходящей через эти центры; $\mathcal{M}_{AB}$ — коэффициент взаимной индукции витков. Чтобы найти последний, воспользуемся результатом задачи 17.8 (см. формулу для $\mathcal{M}_{12}$):

$$\mathcal{M}_{AB} = -\frac{(\pi a^2)^2}{2\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2 \cos \alpha}{d^3}.$$

Найдем далее силу тока в витке B :

$$I_B = \frac{\mathcal{E}_B}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \Phi_{AB}}{\partial t} = -\frac{\mathcal{M}_{AB}}{R} \frac{dI_A}{dt} = \frac{(\pi a^2)^2}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{4K_0 I \cos \alpha}{R d^3}.$$

Следовательно,

$$a) \quad M = 4\pi^4 a^8 K_0^2 I^3 \sin 2\alpha / (4\pi\epsilon_0 c^2)^2 d^6 R.$$

Если $\alpha = 0$, то $M = 0$.

$$б) \quad F = 24\pi^4 a^8 K_0^2 I^3 / (4\pi\epsilon_0 c^2)^2 d^7 R.$$

Витки притягиваются друг к другу.

- в) Если самоиндукцией витков не пренебрегать, то величина силы тока I_B будет меньше. Вместе с этим уменьшатся величины F и M .
 г) Ответ к п. (а) не изменится: при $\alpha = \pi/2$ имеем $\sin 2\alpha = 0$, и, следовательно, момент сил, действующих на виток B , по-прежнему равен нулю. Ответ к п. (б) изменится: при $\alpha = \pi/2$ имеем $\cos 2\alpha = 0$. Следовательно, сила, действующая на виток B , обратится в нуль.

К главе 20. Решения уравнений Максвелла в пустом пространстве

- 20.1. а) Волновое уравнение, которому должно удовлетворять электрическое поле E , имеет вид

$$\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0.$$

Для компоненты α ($\alpha = x, y, z$) это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_\alpha}{\partial t^2} = 0.$$

Подставляя в последнее уравнение $E_\alpha = E_{0\alpha} \exp[i(\omega t - kx)]$ и выполняя дифференцирование, находим $[k^2 - (\omega^2/c^2)] E_\alpha = 0$. Так как $\omega = ck$, это уравнение выполняется для любого α .

- б) Представим α -ю компоненту вектора E_0 , которая вообще говоря комплексна, в виде $E_{0\alpha} = E'_{0\alpha} \exp(i\varphi_\alpha)$, где $E'_{0\alpha}$ — модуль комплексного числа $E_{0\alpha}$, а φ_α — его аргумент. Тогда $E_\alpha = E'_{0\alpha} \times \exp[i(\omega t - kx + \varphi_\alpha)]$. Следовательно, вещественную часть E_α можно записать в таком виде: $E'_{0\alpha} \cos(\omega t - kx + \varphi_\alpha)$. Найдем далее уравнение движения точки, для которой фаза волны $\varphi = \omega t - kx$ имеет некоторое фиксированное значение. Очевидно, в этой точке компоненты напряженности электрического поля волны будут иметь определенные значения, равные $E_\alpha = E'_{0\alpha} \cos(\varphi + \varphi_\alpha)$. Определяя x , находим закон движения

$$x = \frac{\omega}{k} t - \frac{\varphi}{k} = ct - \frac{\varphi}{k}.$$

Выбранная точка, таким образом, движется в положительном направлении оси x со скоростью c .

- в) Подействуем оператором ∇ на вектор (умножим скалярно) $E = E_0 \exp[i(\omega t - kx)]$:

$$\nabla \cdot E = E_0 \cdot \nabla e^{i(\omega t - kx)} = E_0 \cdot (-ike_x) e^{i(\omega t - kx)} = -ike_x \cdot E.$$

Здесь мы воспользовались правилом, сформулированным в п. (в) задачи 2.3 (см. решение задачи 2.3). Следовательно, действие оператора ∇ на подобные функции сводится к простому умножению их на вектор $-ike_x$. Действие оператора $\partial/\partial t$ сводится к умножению таких функций на число $i\omega$.

- г) Пусть напряженности электрического и магнитного полей зависят от t и x синусоидально. Тогда в комплексном виде можно записать $E = E_0 \exp[i(\omega t - kx)]$ и $B = B_0 \exp[i(\omega t - kx)]$. Подставляя эти выражения в уравнения Максвелла в пустоте

$$\nabla \cdot E = 0, \quad \nabla \cdot B = 0,$$

$$\nabla \times E = -\frac{\partial}{\partial t} B, \quad \nabla \times B = \frac{1}{c^2} \frac{\partial E}{\partial t},$$

получаем

$$(e_x \cdot E) = 0, \quad (e_x \times E) = \omega B,$$

$$(e_x \cdot B) = 0, \quad e_x \times B = -\frac{\omega}{c^2} E.$$

Определяя E из последнего уравнения и подставляя выражение для E во второе уравнение, находим

$$-ke_x \times (e_x \times B) = \frac{\omega^2}{c^2} B \quad (1)$$

Поскольку $e_x \times (e_x \times B) = e_x (e_x \cdot B) - B (e_x \cdot e_x)$, то, учитывая третье из полученных уравнений $e_x \cdot B = 0$, а также, что $(e_x \cdot e_x) = 1$, из (1) находим

$$[k^2 - (\omega^2/c^2)] B = 0.$$

Отсюда следует, что $\omega = ck$.

- д) Электрическое поле $E = E_0 \exp\{\pm[i(\omega t + kx)]\}$ описывает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси x . Действие оператора ∇ на подобную функцию сводится к умножению ее на вектор $\pm ike_x$, а действие оператора $\partial/\partial t$ — к умножению этой

функции на число $\pm i\omega$. При этом уравнения Максвелла и связь между ω и k будут такими же, какими они были найдены в п. (г) данной задачи.

- 20.2. Рассмотрим установившийся процесс. Напряженность электрического поля электромагнитной волны, падающей на зеркало, в неподвижной системе координат можно представить в виде $E = E_0 \cos(\omega t - kx)$, где векторы E и E_0 перпендикулярны оси x . На прямой линии $x = vt$, где v — скорость зеркала, должно выполняться условие (на поверхности зеркала тангенциальная составляющая электрического поля равна нулю): $E + E' = 0 = E_0 \cos(\omega t - kx) + E'_0 \cos(\omega' t + k' x)$. Это возможно лишь при $E_0 = -E'_0$ и $\omega t - kx = \omega' t + k' x$. Подставляя $x = vt$ и $k = \omega/c$, $k' = \omega'/c$, получаем

$$\omega' = \omega \left(1 - \frac{v}{c}\right) / \left(1 + \frac{v}{c}\right).$$

Этот результат совпадает с тем, который можно получить, используя преобразования Лоренца.

К главе 21. Решения уравнений Максвелла с токами и зарядами

- 21.1. В соответствии с формулами (21.18) и (21.25) «Лекций» (вып. 6) запишем скалярный и векторный потенциалы

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{[p + (r/c)\dot{p}]_{t-r/c} \cdot r}{r^3}, \quad A = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\dot{p}}{r^3}.$$

Вводя обозначение $p^* = p(t - r/c) + (r/c)\dot{p}(t - r/c)$ и учитывая, что

$$\frac{\partial}{\partial t} p \left(t - \frac{r}{c}\right) = \dot{p}, \quad \frac{\partial}{\partial x_\alpha} p \left(t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{x_\alpha}{rc} \dot{p}_\alpha,$$

находим

$$\nabla\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{p^*}{r^3} - \frac{(\dot{p} \cdot r) r}{c^2 r^5} - \frac{3(p^* \cdot r) r}{r^5} \right],$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\ddot{p}}{r^3}.$$

Подставляя эти выражения в формулу $E = -\nabla\varphi - (\partial A/\partial t)$ и учитывая, что

$$\frac{r^2 \ddot{p}}{c^2} - \frac{(\ddot{p} \cdot r) r}{c^2} = \frac{1}{c^2} r \times (\ddot{p} \times r),$$

находим

$$E = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[p^* - \frac{3(p^* \cdot r) r}{r^2} + \frac{1}{c^2} r \times (\ddot{p} \times r) \right].$$

Последнее выражение эквивалентно формуле (21.26) «Лекций» (вып. 6, стр. 157).

- 21.2. Обозначим через r'_+ и r'_- «запаздывающие» радиусы-векторы $[r'_\pm = x, y, z \mp (d/2) \cos \omega t']$ от положительного и отрицательного зарядов. Согласно рисунку, приведенному в условии данной задачи, имеем

$$r'^2_\pm = r^2 + \left(\frac{d}{2} \cos \omega t'\right)^2 \mp r d \cos \theta \cos \omega t',$$

где $t' = t - r'_{\pm}/c$. Напряженность электрического поля, создаваемая зарядами $+q$ и $-q$ в точке P в соответствии с выражением (21.1) (см. «Лекции», вып. 6, стр. 144), имеет вид

$$\begin{aligned} E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} & \left[\left(\frac{e'_{r+}}{r'^2_+} - \frac{e'_{r-}}{r'^2_-} \right) - 2 \left(\frac{e'_{r+}}{cr'^2_+} \frac{dr'_+}{dt} - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{e'_{r-}}{cr'^2_-} \frac{dr'_-}{dt} \right) + \frac{1}{c} \left(\frac{1}{r'_+} \frac{de'_{r+}}{dt} - \frac{1}{r'_-} \frac{de'_{r-}}{dt} \right) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{c^2} \left(\frac{d^2e'_{r+}}{dt^2} - \frac{d^2e'_{r-}}{dt^2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что точка P расположена на расстоянии $r \gg d$ от диполя. Это позволяет во всех вычислениях ограничиться лишь линейными по d членами. В таком приближении

$$r'_{\pm} = r \mp \frac{d}{2} \cos \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$r'_{\pm} = \mp e_z \frac{d}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] + e_r r,$$

$$\frac{dr'_{\pm}}{dt} = \pm \frac{\omega d}{2} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$\begin{aligned} \frac{de'_{r\pm}}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{r'_{\pm}}{r'_{\pm}} = \pm \frac{e_z}{r} \frac{d\omega}{2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \mp \\ &\mp \frac{e_r}{r} \frac{d\omega}{2} \cos \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2e'_{r\pm}}{dt^2} &= \pm \frac{e_z}{r} \frac{d\omega^2}{2} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \mp \\ &\mp \frac{e_r}{r} \frac{d\omega^2}{2} \cos \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]. \end{aligned}$$

Убедимся, что векторы $de_{r\pm}/dt$ и $d^2e_{r\pm}/dt^2$ направлены вдоль e_{θ} . Вычислим произведения

$$e_r \cdot \frac{de_{r\pm}}{dt} \text{ и } e_r \cdot \frac{d^2e_{r\pm}}{dt^2}.$$

Учитывая, что $e_z \cdot e_r = \cos \theta$, находим, что эти скалярные произведения равны нулю. Здесь уместно напомнить, что этот результат справедлив лишь в линейном по d приближении.

Модули векторов $de_{r\pm}/dt$ и $d^2e_{r\pm}/dt^2$ найдем, вычислив скалярные произведения этих векторов на e_{θ} . Учитывая, что $(e_z \cdot e_{\theta}) =$

$= -\sin \theta$, имеем

$$\begin{aligned}\frac{de_{r\pm}}{dt} &= \pm e_0 \frac{d\omega}{2r} \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right], \\ \frac{d^2 e_{r\pm}}{dt^2} &= \mp e_0 \frac{d\omega^2}{2r} \sin \theta \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right].\end{aligned}$$

После несложных преобразований окончательно находим

$$\begin{aligned}E &= \frac{qd}{4\pi e_0} \left\{ 2e_r \cos \theta \left[\frac{1}{r^3} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega}{cr^2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right] + e_0 \sin \theta \left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + \frac{1}{r^3} \right) \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] - \frac{\omega}{cr^2} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \right] \right\}.\end{aligned}$$

Определяя из этого выражения E_φ , E_θ и E_r , приходим к приведенному в условии задачи результату.

- 21.3. В «Лекциях» (§ 5 гл. 14, вып. 5) отмечалось, что электрическое поле статического диполя и поле постоянного магнитного диполя одинаковы по виду, хотя и удовлетворяют разным уравнениям Максвелла

$$\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0 \text{ и } \nabla \times B = j/\epsilon_0 c^2.$$

Это происходит от того, как отмечалось в «Лекциях», что дипольные поля возникают, когда мы находимся далеко от всех токов и зарядов. Тогда в большей части пространства уравнения для E и B одинаковы: ротор и дивергенция этих полей равны нулю. Но нетрудно убедиться, что подобная симметрия уравнений Максвелла имеет место и в общем случае переменных полей. Действительно, в далеких от зарядов и токов точках пространства уравнения Максвелла однородны:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot E &= 0, & \nabla \cdot B &= 0, \\ \nabla \times E &= -\frac{\partial B}{\partial t}, & c^2 (\nabla \times B) &= \frac{\partial E}{\partial t},\end{aligned}$$

и в силу этого обстоятельства имеет место следующая симметрия:

$$\begin{aligned}\frac{1}{c^2} E \text{ (электр. диполь)} &\longleftrightarrow B \text{ (магн. диполь)}, \\ B \text{ (электр. диполь)} &\longleftrightarrow -E \text{ (магн. диполь)}.\end{aligned}$$

Заменяя в выражениях для электрического и магнитного полей осциллирующего диполя, найденных в задаче 21.2, величину $\rho = e_x q d \cos \omega t$ на $\mu = e_x \pi a^2 i_0 \cos \omega t$, находим

$$B_\varphi = 0,$$

$$\begin{aligned}B_\theta &= \frac{\pi a^2 i_0}{4\pi e_0 c^2} \sin \theta \left[\left(-\frac{\omega^2}{c^2 r} + \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right],\end{aligned}$$

$$B_r = \frac{2\pi a^2 i_0}{4\pi e_0 c^2} \cos \theta \left[\frac{1}{r^3} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right],$$

$$E = c (B \times e_r).$$

21.4. а) Из рисунка, приведенного в условии данной задачи, видно, что

$$r_1^2 = r^2 + a^2 - 2ar \cos \theta, \quad r_2^2 = r^2 + a^2 + 2ar \cos \theta,$$

где для удобства обозначено $d/2 = a$. При $r \gg a$ имеем $r_{1,2} \approx r \mp a \cos \theta$. Запишем следующее разложение в ряд по малому параметру $a/c \ll 1$:

$$\begin{aligned} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \pm \frac{a\omega}{c} \cos \theta \right] &\approx \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \mp \\ &\mp \frac{a\omega}{c} \cos \theta \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \dots \end{aligned}$$

Учитывая, что при $r \gg a$

$$(r \mp a \cos \theta)^{-1} \approx \frac{1}{r} \left[1 \pm \left(\frac{a \cos \theta}{r} \right) \right],$$

получаем требуемое выражение для φ .

- б) Заметим, что если использовать результат п. (а), то можно записать ($z = r \cos \theta$)

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \frac{Q_0 \omega d}{4\pi \epsilon_0 c^2} \frac{\sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r}.$$

Если воспользоваться уравнением $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c^2) (\partial \varphi / \partial t)$, которое в задаче сводится к уравнению $(1/c^2) (\partial \varphi / \partial t) = -(\partial A_z / \partial z)$, то мы видим, что в написанном выше выражении для $(1/c^2) (\partial \varphi / \partial t)$ функция, стоящая после оператора $\partial / \partial z$, есть не что иное, как $-A_z$.

- в) Вычисляя $\mathbf{E} = -\nabla \varphi - (\partial \mathbf{A} / \partial t)$ с помощью найденных в п. (а) и (б) выражений для φ и $\mathbf{A}$, находим ($p = Q_0 d$)

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = \frac{p}{4\pi \epsilon_0} \left\{ \cos \theta \left[\left(\frac{3}{r^3} - \frac{\omega^2}{c^2 r} \right) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\omega}{cr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \mathbf{e}_r + \left[\left(\frac{\omega^2}{c^2 r} - \frac{1}{r^3} \right) \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{3\omega}{cr^2} \sin \omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \mathbf{e}_z \right\}. \end{aligned}$$

Умножая $\mathbf{E}$ скалярно на $\mathbf{e}_r$ и учитывая, что $\mathbf{e}_\varphi = \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r$, а $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_r) = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_z$, находим выражения для E_φ , E_θ и E_r , приведенные в условии задачи 21.2. При этом $c\mathbf{B} = \mathbf{e}_r \times \mathbf{E}$.

- 21.5. а) Интегрируя выражение для $i = dp/dt$ (p — дипольный момент единицы длины) и полагая константу интегрирования равной нулю, находим

$$p = \frac{i_0}{\omega} \cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \right) \cos \omega t,$$

Отсюда дипольный момент элементарного диполя длиной Δz равен

$$\Delta p = \left[\frac{i_0}{\omega} \cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \right) \cos \omega t \right] \Delta z.$$

б) Векторный потенциал в волновой зоне дается формулой

$$A_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2 r} \int_{-\lambda/4}^{\lambda/4} i_0 \cos \left(\frac{2\pi z}{\lambda} \right) \sin \left[\omega \left(t - \frac{r'}{c} \right) \right] dz,$$

$$\text{где } r' = \sqrt{r^2 + z^2 - 2rz \cos \theta}.$$

При $r \gg \lambda/2$, т. е. при $r \gg c/\omega$, получаем $r' \approx r - z \cos \theta$. Далее, запишем следующее выражение:

$$\begin{aligned} \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{\omega z}{c} \cos \theta \right] &= \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \times \\ &\times \cos (kz \cos \theta) + \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \sin (kz \cos \theta), \end{aligned}$$

где $k = 2\pi/\lambda$. Подставляя это выражение в формулу для векторного потенциала, простым интегрированием находим A_z :

$$A_z = \frac{2i_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{k \sin^2 \theta} \frac{\sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right]}{r}.$$

Нетрудно видеть, что последнее выражение совпадает с найденным в п. (б) задачи 21.4 векторным потенциалом A , если $Q_0 d$ заменить величиной

$$p_0 = - \frac{2i_0 \cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{k\omega \sin^2 \theta}.$$

Поэтому мы можем воспользоваться решением этой задачи [см. п. (в) задачи 21.4] и найти электрическое поле в волновой зоне:

$$E_\theta = \frac{2i_0}{4\pi\epsilon_0 c r} \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta} \cos \left[\omega \left(t - \frac{r}{c} \right) \right].$$

Аналогично для магнитного поля находим, что в волновой зоне существенна лишь компонента B_ϕ , причем $B_\phi = E_\theta/c$.

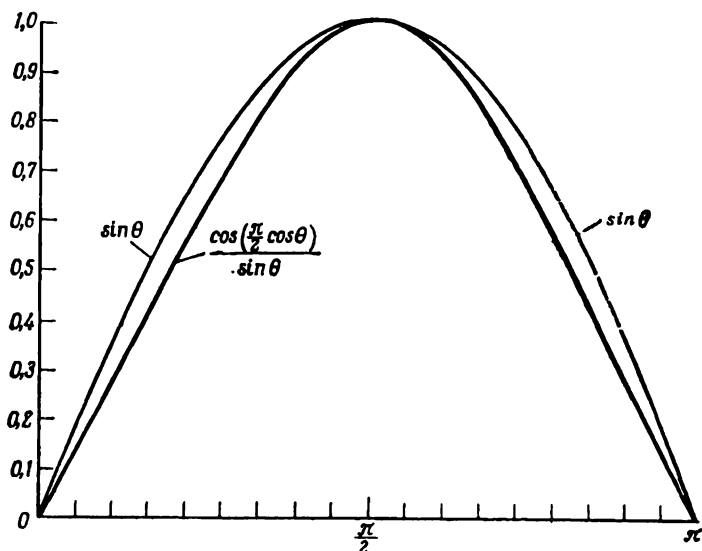
в) Зависимость E_θ от угла θ имеет вид для антенны

$$E_\theta \sim \frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \cos \theta \right)}{\sin \theta},$$

для одного диполя

$$E_\theta \sim \sin \theta.$$

Характер этой зависимости для антенны и одного диполя примерно одинаковый (см. рисунок)



21.6. Электрическое и магнитное поля движущегося заряда описываются потенциалами Льенара — Вихерта

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 [R' - (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}')/c]}, \quad A = \frac{qv'}{4\pi\epsilon_0 c^2 [R' - (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}')/c]},$$

где R' и $\mathbf{v}'$ берутся в момент времени $t' = t - R'/c$.

а) Поскольку при движении по окружности в любой момент времени $\mathbf{v} \perp \mathbf{R}$, то в центре круга имеем

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a}.$$

б) Аналогично можно написать

$$A = \frac{qv'}{4\pi\epsilon_0 c^2 a},$$

где $\mathbf{v}'(t') = v[t - (a/c)]$. Принимая за начало отсчета времени момент времени, когда заряд находится в точке P , находим

$$v'_x = -v \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right), \quad v'_y = v \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right),$$

причем $\omega = v/a$. Таким образом,

$$A_x = -\frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right),$$

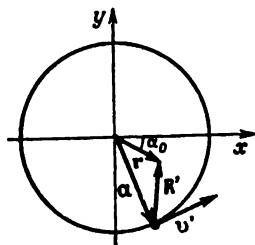
$$A_y = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right).$$

Отсюда, полагая $t = 0$, получаем значения A_x и A_y в момент времени, когда частица находится в точке P .

- в) Определим потенциалы в точке, расположенной вблизи центра круга (r — радиус-вектор этой точки; см. рисунок). Обозначая через α_0 угол между r и осью x , запишем

$$R'^2 = a^2 + r^2 - 2ar \cos(\omega t' - \alpha_0),$$

$$t' = t - \frac{R'}{c}.$$



Наша конечная цель — вычислить производные от потенциалов в начале координат. Поэтому, записывая R' как функцию от t , x и y , удержим лишь члены первого порядка по r :

$$R' \approx a - r \cos\left(\omega t - \frac{v}{c} - \alpha_0\right) = a - x \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - y \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right).$$

Выразим теперь через x , y и t скалярное произведение $(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}')$. Как видно из рисунка, $\mathbf{R}' = \mathbf{r} - \mathbf{a}$

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}') &= (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{r}) = vr \sin\left(\omega t - \frac{v}{c} - \alpha_0\right) = \\ &= vx \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - vy \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right). \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} R' - \frac{(\mathbf{v}' \cdot \mathbf{R}')}{c} &= a - \left(x - \frac{v}{c}y\right) \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \\ &- \left(y + \frac{v}{c}x\right) \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right). \end{aligned}$$

Теперь у нас есть все, чтобы найти $\Phi(x, y, t)$:

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, t) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a} \left[1 + \left(\frac{x}{a} - \frac{v}{c}\frac{y}{a}\right) \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{y}{a} + \frac{v}{c}\frac{x}{a}\right) \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) \right]. \end{aligned}$$

Воспользовавшись формулой $\mathbf{E} = -\nabla\Phi - (\partial\mathbf{A}/\partial t)$, вычислим напряженность электрического поля [напомним, что вектор $\mathbf{A}$ в центре круга найден в п. (б)]. Имеем

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \frac{v}{c} \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) \right],$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \left[\left(\frac{v^2}{c^2} - 1\right) \sin\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) - \frac{v}{c} \cos\left(\omega t - \frac{v}{c}\right) \right].$$

Легко убедиться, что при $t = 0$, т. е. когда заряд находится в точке P , $E_x < 0$ и $E_y < 0$. Если бы не было запаздывания, то

вектор E был бы направлен из точки P в центр круга. Здесь же мы получили небольшую компоненту E_y , причем отрицательную. Таким образом, вектор E слегка отклоняется вниз от оси x . Если бы был справедлив «запаздывающий закон Кулона», вектор E также составлял бы с осью x малый угол, но был бы направлен вверх по оси y .

Определим теперь векторный потенциал A . Для этого необходимо найти $v'(t, x, y)$. Имеем

$$\begin{aligned} v'_x &= -v \sin \omega t' = -v \sin \left[\omega t - \frac{v}{c} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{v^2 r}{ac} \cos \left(\omega t - \frac{v}{c} - \alpha_0 \right) \right] \approx -v \sin \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) - \\ &\quad - \frac{v^2 x}{ac} \cos^2 \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) - \frac{v^2 y}{ac} \cos \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) \sin \left(\omega t - \frac{v}{c} \right), \\ v'_y &= v \cos \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) - \left(\frac{v^2 x}{ac} \sin \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) \cos \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{v^2 y}{ac} \sin^2 \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) \right). \end{aligned}$$

Используя эти выражения в формуле для A , после несложных вычислений с удержанием лишь членов первого порядка по r имеем

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \left\{ -v \sin \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{vx}{2a} \sin 2 \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) - \frac{v^2 x}{ac} - \frac{vy}{c} \sin^2 \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) \right\}, \\ A_y &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} \left\{ v \cos \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) - \frac{v^2 y}{ac} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{vx}{a} \cos^2 \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) + \frac{vy}{2a} \sin 2 \left(\omega t - \frac{v}{c} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что только z -компонента магнитного поля отлична от нуля:

$$B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{qv}{4\pi\epsilon_0 c^2 a^2}.$$

Таким образом, магнитное поле в центре круга не зависит от времени. Оно совпадает с полем в центре бесконечно тонкого кругового витка радиусом a , по которому течет ток $I = qv/2\pi$ (ср. с решением задачи 14.5).

г) В нашем случае формула (21.1) для напряженности электрического поля (см. «Лекции», вып. 6, стр. 144) записывается в виде

$$E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e_{r'}}{a^2} + \frac{1}{ac} \frac{de_{r'}}{dt} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 e_{r'}}{dt^2} \right].$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} e'_x &= -\cos \left(\frac{v}{a} t - \frac{v}{c} \right), \\ e'_y &= -\sin \left(\frac{v}{a} t - \frac{v}{c} \right). \end{aligned}$$

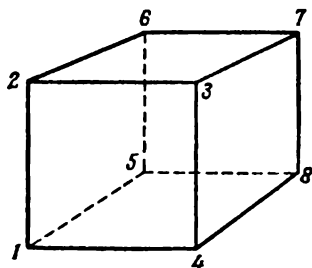
Дифференцируя, получаем для E_x и E_y формулы, совпадающие с уже найденными, а магнитное поле дается выражением

$$cB_z = e'_x E_y - e'_y E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c^2 a^2},$$

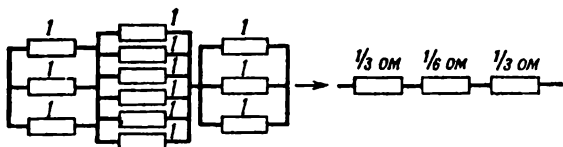
которое опять совпадает с прежним результатом.

К главе 22. Цепи переменного тока

- 22.1. а) Пусть ток втекает в узел 1 (см. рисунок), а вытекает из узла 7. В силу симметрии системы потенциалы точек 2, 5 и 4 одинаковы.

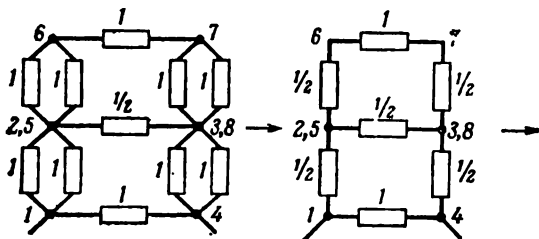


Также равны друг другу потенциалы точек 6, 3 и 8. В итоге получим электрическую схему следующего типа:

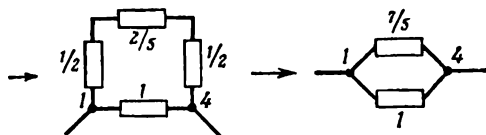


Сопротивление при таком соединении равно $5/6$ ом.

- б) Пусть проволоки соединены так, что ток втекает в узел 1, а вытекает из узла 4. Тогда одинаковы потенциалы узлов 2 и 5. Объединим эти узлы. Соответственно равны друг другу потенциалы узлов 3 и 8. Их также объединяем. В итоге получим следующую плоскую эквивалентную схему:

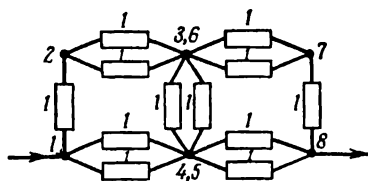


Преобразуем ее следующим образом:

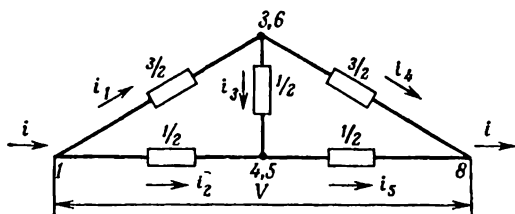


Сопротивление последней схемы равно $7/12$ ом.

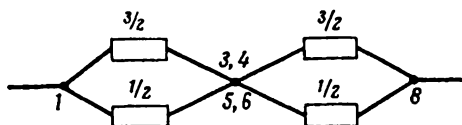
- в) Пусть ток втекает теперь в узел 1, а вытекает из узла 8. В этом случае равны друг другу попарно потенциалы точек 3 и 6, а также 4 и 5. Объединим соответствующие узлы попарно. Получится следующая эквивалентная схема:



Эта цепь может быть представлена в виде мостовой схемы



Сопротивление таких цепей (см. «Лекции», вып. 6, стр. 180) обычно нельзя вычислить, пользуясь лишь формулами для параллельных и последовательных сопротивлений, и приходится использовать правила Кирхгофа (см. § 3 гл. 22 «Лекций», вып. 6). Однако в нашем случае можно обойтись и без правил Кирхгофа, поскольку в силу идентичности левой и правой половин цепи потенциалы в точках 3, 6 и 4, 5 одинаковы, и, следовательно, ток $i_3 = 0$. Поэтому эквивалентную схему можно представить в виде



откуда следует, что сопротивление цепи равно $3/4$ ом. Другие возможные соединения сводятся к одному из рассмотренных выше.

22.2. а) Найдем полный импеданс цепи:

$$Z(\omega) = i\omega\mathcal{L} \frac{2 - \omega^2 C\mathcal{L}}{1 - \omega^2 C\mathcal{L}}.$$

Если теперь ввести комплексную э. д. с. $\hat{V} = V_0 e^{i\omega t}$, то комплексный ток равен

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}}{Z(\omega)} = \frac{\hat{V}(1 - \omega^2 C\mathcal{L})}{i\omega\mathcal{L}(2 - \omega^2 C\mathcal{L})}.$$

Выделяя вещественную часть этого выражения, находим силу тока в цепи

$$I = V_0 \frac{1 - \omega^2 C\mathcal{L}}{\omega\mathcal{L}(2 - \omega^2 C\mathcal{L})} \sin \omega t. \quad (1)$$

- б) В этом случае каждая из индуктивностей станет равной $\mathcal{L} + \mathfrak{M}$, и ответ можно получить, если в выражении (1) заменить $\mathcal{L}$ формально на $\mathcal{L} + \mathfrak{M}$, а C на $C/(1 + \omega^2 \mathfrak{M}C)$. Действительно, если обозначить через i_C и $i_{\mathcal{L}}$ токи через параллельно соединенные емкость и индуктивность $\mathcal{L}$, так что $i_C + i_{\mathcal{L}} = I$, где I — полный ток в цепи, то

$$\hat{V} = \mathcal{L} \frac{d\hat{I}}{dt} + \mathfrak{M} \frac{d\hat{i}_{\mathcal{L}}}{dt} + \mathcal{L} \frac{d\hat{i}_{\mathcal{L}}}{dt} + \mathfrak{M} \frac{d\hat{I}}{dt},$$

и, следовательно,

$$\hat{V} = i\omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M})\hat{I} + i\omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M})i_{\mathcal{L}}.$$

С другой стороны, согласно закону Кирхгофа, для напряжений имеем

$$\hat{i}_C \left(-\frac{i}{\omega C} \right) = i\omega\mathcal{L}\hat{i}_{\mathcal{L}} + i\omega\mathfrak{M}\hat{I} = i\omega\mathcal{L}\hat{i}_{\mathcal{L}} + i\omega\mathfrak{M}(\hat{i}_C + \hat{i}_{\mathcal{L}});$$

отсюда

$$-\hat{i}_C \left(\frac{1 + \omega^2 \mathfrak{M}C}{\omega C} \right) = \hat{i}_{\mathcal{L}} \omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M}).$$

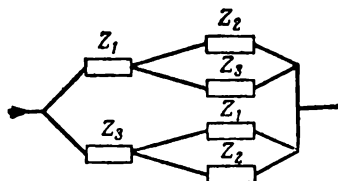
Уравнение такого же типа можно было записать и в п. (а) задачи. Однако мы видим, что наличие взаимной индукции ведет к замене C на $C/(1 + \omega^2 \mathfrak{M}C)$, а $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L} + \mathfrak{M}$. Учитывая это, находим комплексный ток в цепи:

$$\hat{I} = \frac{\hat{V}(1 - \omega^2 \mathcal{L}C)}{i\omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M})[2 - \omega^2 C(\mathcal{L} - \mathfrak{M})]}.$$

Вещественная часть этого выражения дает нам искомую силу тока в цепи:

$$I(t) = V_0 \frac{(1 - \omega^2 \mathcal{L}C) \sin \omega t}{\omega(\mathcal{L} + \mathfrak{M})[2 - \omega^2 C(\mathcal{L} - \mathfrak{M})]}.$$

22.3. а) Схему можно представить в следующем виде;



$$Z_1 = i\omega\mathcal{L},$$

$$Z_2 = R,$$

$$Z_3 = \frac{1}{i\omega C}.$$

При этом импедансы верхней цепи Z' и нижней цепи Z'' даются выражениями

$$Z' = \frac{z}{Z_2 + Z_3} \quad \text{и} \quad Z'' = \frac{z}{Z_1 + Z_2},$$

где $z = Z_1Z_2 + Z_1Z_3 + Z_2Z_3$. Полный импеданс цепи равен

$$Z = Z'Z''/(Z' + Z'') = z/(Z_1 + 2Z_2 + Z_3).$$

Подставляя в последнее выражение значения Z_i с учетом того, что $R^2 = \mathcal{L}/2C$, получаем $Z = R$.

- б) Если $|Z'| = |Z''|$ и $\text{Re } Z' = \text{Re } Z''$, то энергия, выделяемая на Z' , равна энергии, выделяемой на Z'' . Из найденных в п. (а) выражений для Z' и Z'' следует, что должно выполняться равенство $|Z_2 + Z_3| = |Z_1 + Z_2|$, т. е. $\sqrt{R^2 + (1/\omega^2 C^2)} = \sqrt{R^2 + \omega^2 \mathcal{L}^2}$. Отсюда ясно, что $\omega^2 = 1/\mathcal{L}C$.

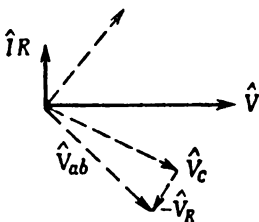
22.4. Введем комплексную э. д. с. $\mathcal{V} = E_0 \exp(i\omega t)$. Будем считать потенциал «нижней» клеммы генератора равным нулю. Тогда потенциал точки a равен $\mathcal{V}_a = I(-i/\omega C) \equiv \mathcal{V}_C$, а в точке b потенциал $\mathcal{V}_b = IR \equiv \mathcal{V}_R$, причем $I = \mathcal{V}/(R - i/\omega C)$.

Кроме того,

$$\hat{\mathcal{V}}_{ab} = \hat{\mathcal{V}}_C - \hat{\mathcal{V}}_R = \hat{I} \left(-\frac{i}{\omega C} - R \right) = \hat{I} \left(\frac{-R - i/\omega C}{R - i/\omega C} \right).$$

Числитель и знаменатель дроби, стоящей в скобках, равны по модулю; следовательно, модуль дроби не зависит от частоты.

Проследим теперь зависимость фазы $\mathcal{V}_{ab}$ от частоты. При низких частотах напряжение, создаваемое источником, падает в основном на конденсаторах. Это означает, что можно «забыть» про сопротивление R , т. е. фазы напряжения $\mathcal{V}_{ab}$ и э. д. с. $\mathcal{V}$ совпадают. Наоборот, при высоких частотах импедансы конденсаторов весьма малы и ими можно пренебречь. Следовательно, потенциал в точке a будет совпа-



дать с потенциалом нижней клеммы генератора, а в точке b — с потенциалом верхней клеммы. Напряжение $\mathcal{V}_{ab}$ противоположно по фазе э. д. с. Однако на основании сказанного мы не можем решить, увеличивается ли фаза при возрастании частоты от 0 до π или она уменьшается от 0 до $-\pi$; разности фаз π и $-\pi$ эквивалентны. Рассмотрим поэтому вопрос подробнее. Воспользуемся геометрическим способом изображения колебаний (см. § 1 гл. 30 «Лекций»,

вып. 3) и учтем, что ток через конденсатор опережает напряжение по фазе на $\pi/2$. При низких частотах существенны импедансы конденсаторов, при этом на верхней диаграмме э. д. с. и ток (напряжение IR) изображены сплошными векторами, а при частотах, отличных от нуля,

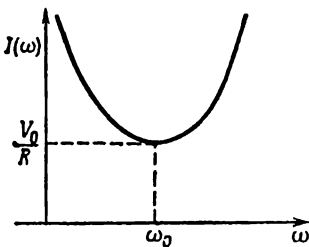
все напряжения в цепи (кроме э. д. с.) изображены векторами в виде штриховых линий. Видно, что при увеличении частоты фаза напряжения V_{ab} меняется от 0 до $-\pi$.

Учтем теперь внутреннее сопротивление генератора. При больших частотах оно приводит к уменьшению напряжения на его клеммах в $(R + R/5)/R$ раз и, следовательно, к такому же уменьшению напряжения V_{ab} . При более низких частотах это уменьшение менее заметно (при низких частотах, как уже отмечалось, сопротивления R роли не играют!). Из тех же соображений следует, что фаза напряжения V_{ab} остается в первом приближении относительно внутреннего сопротивления неизменной. В этом можно убедиться и путем точных вычислений.

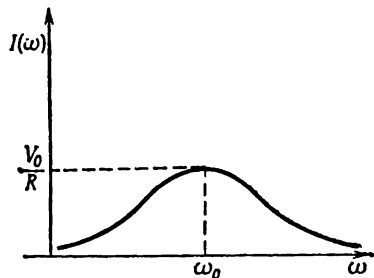
- 22.5. При параллельном соединении импеданс цепи определяется выражением $Z^{-1} = R^{-1} + i[\omega C - (1/\omega L)]$. Вводя комплексную э. д. с. $\hat{V} = V_0 \exp(i\omega t)$ и определяя силу тока в цепи $I = \hat{V}/Z(\omega)$, находим выражение для амплитуды силы тока:

$$I_0 = V_0 \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}.$$

При $\omega_0^2 = 1/LC$ наступает «резонанс»: при этом условии сила тока в цепи минимальна и равна (по амплитуде) $I_{\min} = V_0/R$. Прямой характер «резонансной» кривой показан на фиг. 1. При малых ω ток в цепи течет в основном через индуктивность, а при больших — через емкость. В момент резонанса ток течет лишь через активное сопротивление.



Фиг. 1



Фиг. 2

Определим ширину резонансной кривой подобно тому, как это делалось при анализе механических колебаний (см. гл. 23 «Лекций», вып. 2). Для I_0^2 имеем

$$I_0^2 = V_0^2 \left[\left(\frac{1}{R} \right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2 \right] = \frac{V_0^2 C^2}{\omega^2} \left[\frac{\omega^2}{(RC)^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right],$$

($\omega_0^2 = 1/LC$). Если $1/RC \ll \omega_0$, т. е. $R \gg \sqrt{L/C}$, эту формулу можно упростить (таким же образом, как и в гл. 23 «Лекций», вып. 2). Тогда

$$I_0^2 = V_0^2 4C^2 \left[(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{4(RC)^2} \right].$$

Ширину резонансной кривой определим по частотам, при которых I_0^2 в два раза больше, чем в резонансе. Находим $\Delta\omega = 1/RC$. При по-

следовательном соединении элементов импеданс цепи $Z(\omega) = R + i\{\omega L - (1/\omega C)\}$, а амплитуда тока

$$I_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}.$$

В этом случае резонансная кривая показана на фиг. 2. Зависимость I_0^2 от частоты имеет вид

$$I_0^2 = \frac{V_0^2}{\frac{L^2}{\omega^2} \left[\frac{R^2}{L^2} \omega^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 \right]},$$

где опять-таки $\omega_0^2 = 1/LC$. При $R/L \ll \omega_0$, т. е. $R \ll \sqrt{L/C}$,

$$I_0^2 = \frac{V_0^2}{4L^2 \left[\frac{R^2}{4L^2} + (\omega - \omega_0)^2 \right]}.$$

Ширина резонансной кривой равна $\Delta\omega = R/L$. Если $R = K\sqrt{L/C}$ для параллельного и $R = (1/K)\sqrt{L/C}$ для последовательного соединения, то ширина резонансной кривой в обоих случаях в K раз меньше резонансной частоты.

22.6. Представим схему так, как показано на рисунке. При этом

$$Z_1 = i\omega L + R_a, \quad Z_2 = R, \quad Z_3 = R, \quad Z_4 = 1/(i\omega C + R_b^{-1}).$$

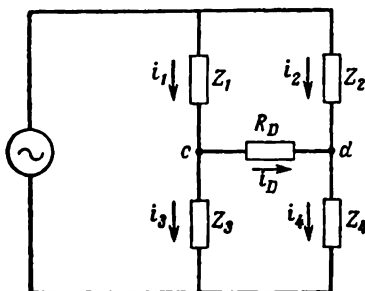
Очевидно,

$$i_1 Z_1 + i_D R_D - i_2 Z_2 = 0,$$

$$i_3 Z_3 - i_4 Z_4 - i_D R_D = 0,$$

$$i_D = i_1 - i_3 = i_4 - i_2.$$

Балансировка моста осуществляется, если $i_D = 0$. Отсюда $i_1 = i_3$ и $i_2 = i_4$; следовательно, $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$, т. е. $(i\omega L + R_a)/(i\omega C + R_b^{-1}) = R^2$. Определяя вещественную и мнимую части, находим



$$R^2 = \frac{R_a R_b + \omega^2 L C R_b^2}{1 + \omega^2 C^2 R_b^2}, \quad L = C R_a R_b.$$

Из этих выражений следует, что $R^2 = R_a R_b$ и, следовательно, $L = C R^2$.

22.7. В этой задаче условие балансировки моста выводится точно также, как и в задаче 22.6. Здесь надо лишь считать, что

$$Z_1 = r_1, \quad Z_3 = r_2, \\ Z_2 = R_1 - \frac{1}{i\omega C_1}, \quad Z_4 = -\frac{iR_2/\omega C_2}{(R_2 - i/\omega C_2)}.$$

Поскольку баланс наступает, если $Z_1 Z_4 = Z_2 Z_3$, то

$$r_1 = -\frac{iR_2/\omega C_2}{(R_2 - i/\omega C_2)} = r_2 \left(R_1 - \frac{1}{i\omega C_1} \right).$$

Приравнявая по отдельности вещественные и мнимые части этого уравнения, находим условия баланса:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2}}$$

и

$$\frac{r_1}{r_2} = \left(\frac{C_2}{C_1} \right) + \left(\frac{R_1}{R_2} \right).$$

22.8. Импеданс цепи дается выражением

$$Z = \frac{R}{1 + i\omega CR} + \frac{i\omega LR}{R + i\omega L}.$$

а) Пусть $RC = L/R$. Тогда $Z = R$. Следовательно, амплитуда тока в этом случае не зависит от частоты.

б) Падение напряжения на RC -паре, когда $RC = L/R$, дается выражением

$$\hat{U} = Z_1 \hat{I} = \frac{Z_1 V_0}{R} e^{i\omega t},$$

где

$$Z_1 = R/(1 + i\omega CR).$$

Представляя отношение Z_1/R в виде

$$Z_1/R = e^{-i\varphi}/\sqrt{1 + \omega^2 C^2 R^2},$$

где $\operatorname{tg} \varphi = \omega CR$, находим искомую разность фаз

$$\varphi = \operatorname{arctg}(\omega CR) = \operatorname{arctg}(\omega L/R).$$

22.9. Суммарная емкость m одинаковых последовательно соединенных конденсаторов равна $C_{\text{общ}} = C/m$. Импеданс цепи Z равен сумме сопротивлений: $Z_C = -im/\omega C$, индуктивного $Z_L = i\omega L$ и активного сопротивления R . Если э. д. с. представить в комплексной форме, то из закона Ома следует

$$\hat{U} = \frac{V_0 \exp(i\omega t)}{\{R + i[\omega L - (m/\omega C)]\}}.$$

Вещественную часть силы тока можно записать в виде

$$\operatorname{Re} \hat{I} = I_0 \cos(\omega t - \varphi), \quad \text{где } I_0 = V_0 / \sqrt{R^2 + [\omega L - (m/\omega C)]^2}.$$

а) Следовательно, мощность дается выражением

$$P = I_0^2 R / 2 = V_0^2 R / 2 \{R^2 + [\omega L - (m/\omega C)]^2\}.$$

- б) Мощность, выделяемая на активном сопротивлении, максимальна, когда m удовлетворяет условию $\omega L - (m/\omega C) \approx 0$, т. е. при $m \approx \omega^2 CL$. Для заданных значений параметров цепи мощность максимальна при $m = 2$.

Падение напряжения на емкости равно $U_C = IZ_C$. Максимальное мгновенное напряжение на емкости с учетом выражения для тока I_0 равно $\text{Re } \hat{U}_C = V_0 m / \omega C \sqrt{R^2 + [\omega L - (m/\omega C)]^2}$, а на сопротивлении R равно $U_R = I_0 R$. Таким образом,

$$U_R = \frac{V_0 R}{\sqrt{R^2 + [\omega L - (m/\omega C)]^2}}.$$

Когда $m = 2$, $U_R = \text{Re } U_C = 100$ в.

К главе 23. Полые резонаторы

- 23.1. Представим эквивалентную схему резонансной полости в виде LC -контура. Будем при этом считать, что вся емкость полости определяется узким зазором, отдавая, разумеется, себе отчет в том, что это лишь некоторое приближение. С другой стороны, предположим, что вся индуктивность полости определяется ее тороидальной частью, причем напряженность магнитного поля во всех точках сечения полости, расположенных на расстоянии r от ее оси, одинакова. Если зазор рассматривать как плоский конденсатор, то его емкость равна $C = \epsilon_0 \pi a^2 / d$. Найдем напряженность магнитного поля, выбрав контур в виде окружности радиусом r , ось которой совпадает с осью симметрии полости, и воспользуемся тем, что

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = 2\pi r B = \frac{I}{\epsilon_0 c^2},$$

где I — полный ток, который течет через конденсатор. Имеем $B = I / 2\pi \epsilon_0 c^2 r$. Определим энергию магнитного поля $W = (1/2) LI^2$ в тороидальной части полости:

$$W = \frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV = \frac{I^2}{2} \frac{(b-a)}{2\pi \epsilon_0 c^2} \ln \frac{b}{a}.$$

Отсюда находим $L = [(b-a)/2\pi \epsilon_0 c^2] \ln (b/a)$ и, следовательно, получаем искомое выражение для резонансной частоты

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{2dc^2}{a^2(b-a) \ln(b/a)}}.$$

При охлаждении полости все ее размеры (d, a, b) уменьшаются в одинаковое число раз; поэтому резонансная частота не изменится.

К главе 24. Волноводы

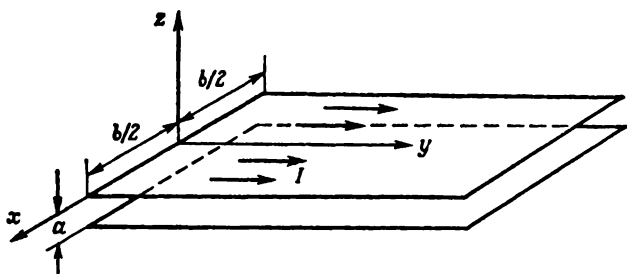
- 24.1. Вывод этих уравнений см. в гл. 24 «Лекций» (вып. 6, стр. 223).
- 24.2. Напряженность магнитного поля бесконечной проводящей плоскости, по которой течет ток, вычислялась в задаче 14.1. Она равна $B = i/2\epsilon_0 c^2$, где i — поверхностная плотность тока. Поскольку в нашем случае $a \ll b$, то можно, пренебрегая краевыми эффектами, воспользоваться этой формулой. Тогда поле между пластинами $B = i/b\epsilon_0 c^2$, а напряженность магнитного поля вне пластин равна нулю. Энергия

магнитного поля, приходящаяся на единицу длины линии, дается выражением

$$\frac{\epsilon_0 c^2}{2} \int B^2 dV = \frac{I^2 a}{2 (\epsilon_0 c^2)^2 b}.$$

Эта энергия равна $(1/2) L_0 I^2$; следовательно, индуктивность единицы длины $L_0 = a/\epsilon_0 c^2 b$. Емкость плоского конденсатора $C = \epsilon_0 A/d$ (A — площадь пластин конденсатора, а d — расстояние между ними). Таким образом, емкость, приходящаяся на единицу длины линии, равна $C_0 = \epsilon_0 b/a$. Отсюда импеданс линии

$$Z_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \frac{a}{\epsilon_0 b c}.$$



- 24.3. Направим ось z вдоль оси цилиндра. Величина напряженности электрического поля в рассматриваемом случае зависит только от z и r (r — расстояние от оси цилиндра). Зависимость от z необходима для того, чтобы поле на торцах секции, где оно параллельно проводящей поверхности, обращалось в нуль, а зависимость от r при фиксированном z можно найти, используя теорему Гаусса. Имеем $E = f(z)/r$, где $f(z)$ — некоторая подлежащая определению функция от z . Компоненты напряженности электрического поля равны $E_x = (x/r^2)f(z)$, $E_y = (y/r^2)f(z)$. Для каждой из этих компонент справедливо уравнение

$$\Delta E_x + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0,$$

которое после подстановки в него выражения для E_x сводится к уравнению

$$\frac{d^2 f(z)}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f(z) = 0.$$

Его решениями являются синусы и косинусы. Нам нужно такое решение, которое обращается в нуль при $z = 0$ и $z = l$. Очевидно, такому условию удовлетворяет $\sin(\pi n z/l)$, где n — целое число. Отсюда $\omega = \pi n c/l$. Для самой низкой моды $n = 1$ и $\omega = \pi c/l$.

Емкость единицы длины рассматриваемой линии передачи дается выражением (см. решение задачи 6.5) $C_0 = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$, а индуктивность единицы длины (см. решение задачи 17.6) $L_0 = \ln(b/a)/2\pi\epsilon_0 c^2$. Отсюда частота $\omega_0 = 1/\sqrt{LC} = c/l$. Эта частота в π раз меньше минимальной собственной частоты резонатора, полученной выше.

- 24.4. Функция $E_0(x, z)$ должна обращаться в нуль при $x = 0$, а и $z = 0, l$. Зависимость напряженности электрического поля от координат в прямоугольных сечениях описывается гармоническими функциями, поэтому в случае самой низкой частоты, для которой распределение поля

имеет наиболее простой вид, имеем

$$E_0(x, z) = A \sin(\pi x/a) \sin(\pi z/l).$$

Подставляя величину $E_y(x, z, t) = E_0(x, z) \exp(i\omega t)$ в уравнение Максвелла

$$\Delta E_y - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0.$$

для самой низкой резонансной частоты находим

$$\omega = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}}.$$

- 24.5. а) Напряжение в произвольной точке x в момент времени t есть суперпозиция падающей и отраженной волн:

$\hat{V}(x, t) = \hat{V}_{\text{пад}}(x, t) + \hat{V}_{\text{отр}}(x, t) = A_1 \exp[i(\omega t - kx)] + A_2 \exp[i(\omega t + kx)]$, где $k = \omega/c$. При $x = l$ $V(l, t) = 0$; следовательно, $A_1 \exp(-ikl) + A_2 \exp(ikl) = 0$, т. е. $A_2 = -A_1 \exp(-2ikl)$. При $x = 0$ получаем $V(0, t) = V_0 \cos \omega t$, откуда $V_0 = A_1 + A_2$.

Таким образом,

$$A_1 = \frac{V_0 e^{ikl}}{2i \sin(kl)}, \quad A_2 = -\frac{V_0 e^{-ikl}}{2i \sin(kl)}$$

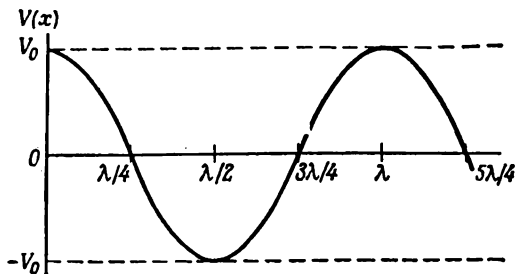
и

$$V_{\text{пад}}(x, t) = \frac{V_0}{2 \sin(kl)} \sin(\omega t - kx + kl),$$

$$V_{\text{отр}}(x, t) = \frac{V_0}{2 \sin(kl)} \sin(\omega t + kx - kl).$$

Обратим внимание на то, что при $kl = \pi n$ (n — целое число) амплитуды волн в соответствии с нашими формулами обращаются в бесконечность. С точки зрения физики это означает наступление резонанса — частота источника сравнивается с одной из резонансных частот отрезка кабеля. Амплитуда колебаний при резонансе на самом деле конечна: величина ее определяется омическими потерями, которыми мы пренебрегли.

- б) $V(x, t) = V_{\text{пад}}(x, t) + V_{\text{отр}}(x, t) = (V_0/\sin kl) \sin[k(l-x)] \cos \omega t$. При $l = 5\pi c/2\omega = 5x/4$ ($\lambda = 2\pi c/\omega$) имеем $V(x, t) = V_0 \cos(\omega x/l) \times \cos \omega t$. Амплитуда напряжения максимальна при $x = 0, \lambda/2, \lambda$ (см. рисунок).



- в) Пользуясь формулой (24.1), приведенной в «Лекциях» (вып. 6, стр. 223), находим для $I(x)$

$$I(0) = 0, \quad I\left(\frac{l}{2}\right) = -V_0 \sqrt{\frac{C_0}{2L_0}} \sin \omega t,$$

$$I(l) = V_0 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \sin \omega t.$$

- г) Так как поглощение отсутствует, средняя работа, производимая генератором, равна нулю [в этом можно убедиться также, вычислив среднее значение $I(0)V_0(0)$]. Следовательно, средний момент силы также равен нулю.

24.6. Как и в предыдущей задаче, запишем напряжение в виде

$$V(x, t) = A_1 e^{i(\omega t - kx)} + A_2 e^{i(\omega t + kx)},$$

где $k = \omega \sqrt{LC}$. Для определения A_1 и A_2 имеем два условия: $V_0 = A_1 + A_2$ при $x = 0$ и $V(l)/I(l) = Z_T$ при $x = l$. Так как

$$I(l) = I_+(l) + I_-(l) = \frac{V_+(l)}{Z_0} - \frac{V_-(l)}{Z_0} = \frac{1}{Z_0} (A_1 e^{-ikl} - A_2 e^{ikl}),$$

то условие при $x = l$ принимает вид

$$\frac{A_1 e^{-ikl} + A_2 e^{ikl}}{A_1 e^{-ikl} - A_2 e^{ikl}} Z_0 = Z_T,$$

или

$$A_1 \left(1 - \frac{Z_T}{Z_0}\right) e^{-ikl} = -A_2 \left(1 + \frac{Z_T}{Z_0}\right) e^{ikl}.$$

Мы имеем два уравнения для A_1 и A_2 . Найдём сначала эти величины, а затем силу тока при $x = 0$:

$$I(0) = I_+(0) + I_-(0) = \frac{1}{Z_0} (A_1 - A_2) = \frac{V_0}{Z_0} \frac{1 + i(Z_T/Z_0) \operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC})}{i \operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC}) + (Z_T/Z_0)}.$$

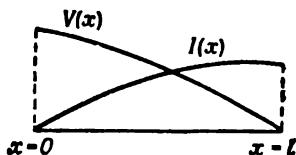
Следовательно,

$$Z_s = \frac{V(0)}{I(0)} = iZ_0 \frac{\operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC}) - i(Z_T/Z_0)}{1 + i(Z_T/Z_0) \operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC})}.$$

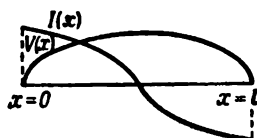
- а) если $Z_T = 0$, то $Z_s = iZ_0 \operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC})$, причём $Z_s = 0$ при $\omega l \sqrt{LC} = \pi n$ и $Z_s = \infty$ при $\omega l \sqrt{LC} = \pi/2 + \pi n$.

Частоты, удовлетворяющие этим условиям, отвечают разным собственным модам линии. Рассмотрим только самые низкие моды. Если $Z_T = 0$, т. е. линия замкнута накоротко, напряжение на конце линии равно нулю. На фиг. 1 показано распределение амплитуд напряжений и токов, когда $\omega l \sqrt{LC} = \pi/2$. Видно, что при $x = 0$

ток равен нулю, что и означает $Z_s = \infty$. Фиг. 2 относится к случаю, когда $\omega l \sqrt{LC} = \pi$. В этом случае при $x = 0$ обращается в нуль напряжение, т. е. $Z_s = 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

- б) Если $Z_T = \infty$, то $Z_s = -iZ_0/\operatorname{tg}(\omega l \sqrt{LC})$. Проанализируем этот случай аналогично предыдущему (только теперь при $x = l$ должен обращаться в нуль ток). Можно понять, почему при $\omega l \sqrt{LC} = (\pi/2) + n\pi$ $Z_s = 0$, а при $\omega l \sqrt{LC} = n\pi$ $Z_s = \infty$ (см. фиг. 2).
- в) В случае $Z_T = Z_0$ имеем $Z_s = Z_0$, т. е. линия эквивалентна бесконечной.

24.7. На стыке двух передающих линий выполняются следующие условия «сшивки»:
для токов

$$I_{\text{пад}} + I_{\text{отр}} = I_{\text{пр}},$$

и для напряжений

$$V_{\text{пад}} + V_{\text{отр}} = V_{\text{пр}}.$$

Используя тот факт, что

$$V_{\text{пад}} = Z_1 I_{\text{пад}}, \quad V_{\text{отр}} = -Z_1 I_{\text{отр}}, \quad V_{\text{пр}} = Z_2 I_{\text{пр}},$$

получаем систему уравнений

$$\frac{V_{\text{пад}}}{Z_1} - \frac{V_{\text{отр}}}{Z_1} = \frac{V_{\text{пр}}}{Z_2},$$

$$V_{\text{пад}} + V_{\text{отр}} = V_{\text{пр}},$$

решая которую, получаем искомый ответ.

24.8. а) Найдем компоненты напряженности магнитного поля:

$$B_x = (\nabla \times \mathbf{A})_x = k_y \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(\omega t - kx)},$$

$$B_y = (\nabla \times \mathbf{A})_y = -k_x \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(\omega t - kx)},$$

$$B_z = (\nabla \times \mathbf{A})_z = 0.$$

Магнитное поле действительно поперечно, так как $B_z = 0$ (волна распространяется вдоль оси z). Легко убедиться, что найденное поле $\mathbf{B}$ удовлетворяет волновому уравнению $\Delta \mathbf{B} - (1/c^2)(d^2 \mathbf{B}/dt^2) = 0$. Проверим теперь выполнение граничных условий. Внутри идеального проводника, из которого, как мы считаем, сделаны стенки волновода, переменное магнитное поле должно отсутствовать, иначе возникли бы бесконечно большие индукционные токи.

Силовые линии магнитного поля имеют вид замкнутых петель, поэтому на стенках волновода должны быть отличны от нуля лишь тангенциальные составляющие вектора $\mathbf{B}$. Но это так и есть на самом деле, поскольку $B_z = 0$.

Определим вектор $\mathbf{E}$. С этой целью проинтегрируем уравнение $\nabla \cdot \mathbf{A} = -(1/c) (\partial \varphi / \partial t)$ и определим потенциал φ :

$$\varphi = \frac{k_z}{\omega} c \sin(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(\omega t - k_x x)}.$$

Поскольку $\mathbf{E}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t},$$

мы имеем

$$E_x = -\frac{k_x k_z}{\omega} c \cos(k_x x) \sin(k_y y) e^{i(\omega t - k_x x)},$$

$$E_y = -\frac{k_y k_z}{\omega} c \sin(k_x x) \cos(k_y y) e^{i(\omega t - k_x x)},$$

$$E_z = \sin(k_x x) \sin(k_y y) \left[\frac{k_z^2}{\omega} c - i\omega \right] e^{i(\omega t - k_x x)}.$$

Кроме того, электрическое поле удовлетворяет волновому уравнению $\Delta \mathbf{E} - (1/c^2) (\partial^2 \mathbf{E} / \partial t^2) = 0$. Согласно граничным условиям, на стенках волновода $E_y = 0$ (при $x = 0$ и $x = a$), $E_x = 0$ (при $y = 0$ и $y = b$) и $E_z = 0$. Написанные выше выражения для компонент напряженности электрического поля удовлетворяют этим условиям.

- б) В этом случае k_z — мнимая величина, т. е. $k_z = -i\alpha$, где α — вещественное число. Но тогда $B_x, B_z \sim \exp(-\alpha z)$, и, следовательно, магнитное поле $\mathbf{B}$ затухает вдоль оси z .

К главе 25. Электродинамика в релятивистских обозначениях

25.1. $\varphi^2 - A^2 = A_\mu A_\mu$; $\mathbf{A} \cdot \mathbf{J} - \rho \varphi = -A_\mu J_\mu$, $\mu = 1, 2, 3, 4$.

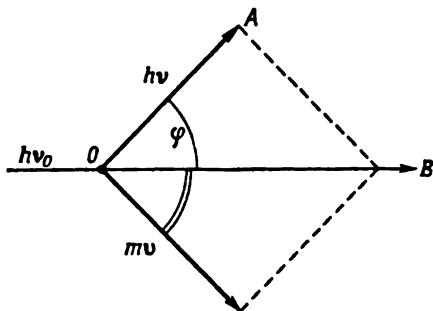
25.2. Начальные условия: электрон покоится (его энергия m_0 , а импульс равен нулю), а фотон движется с энергией $h\nu_0$ и импульсом $h\nu_0$. После их столкновения электрон приобретает энергию m и импульс mv , причём $m = m_0 / \sqrt{1 - v^2}$. Энергию фотона после столкновения обозначим $h\nu$, а его импульс $h\nu$ (считаем $c = 1$). Напишем законы сохранения энергии и импульса:

$$h\nu_0 + m_0 = h\nu + m,$$

$$h\nu_0 = h\nu + mv.$$

(В релятивистских обозначениях это можно написать как $\sum_{\text{налет. частицы}} P_\mu = \sum_{\text{разлет. частицы}} P_\mu$). Из треугольника OAB находим $m^2 v^2 = h^2 \nu_0^2 + h^2 \nu^2 - 2h^2 \nu_0 \nu \cos \varphi$, а из закона сохранения энергии $m = h(\nu_0 - \nu) +$

+ m_0 . Возводя обе части последнего соотношения в квадрат и вычитая затем предыдущее соотношение, путем несложных преобразований находим



$$h\nu = \frac{h\nu_0}{\left[1 + \frac{h\nu_0}{m_0} (1 - \cos \varphi)\right]},$$

где φ — угол отклонения направления распространения фотона от первоначального.

- 25.3. Будем исходить из того факта, что квадрат 4-векторного импульса представляет собой инвариант $P_\mu P_\mu = \text{inv}$, т. е. $E^2 - p^2 = \text{inv}$, где E и p — полная энергия и импульс системы. Квадрат четырехмерного импульса сохраняется в реакции и не зависит от системы координат. В лаб. системе координат (до реакции) $p_0 = m_{e-} + E_\gamma$ (E_γ — энергия фотона), а трехмерный импульс равен импульсу фотона, т. е. по модулю равен E_γ . Квадрат четырехмерного импульса в лаб. системе: $(E_\gamma + m_e)^2 - E_\gamma^2$. Запишем четырехмерный импульс в системе ц. м. Трехмерный импульс здесь по определению равен нулю. Временная же компонента равна $(m_{e-}/\sqrt{1-v_1^2}) + (m_{e+}/\sqrt{1-v_2^2}) + (m_{e-}/\sqrt{1-v_3^2})$, где m_{e-} и m_{e+} — соответственно массы электрона и позитрона ($m_{e-} = m_{e+} = m_e$). Таким образом,

$$(E_\gamma + m_e)^2 - E_\gamma^2 = \left(\frac{m_{e-}}{\sqrt{1-v_1^2}} + \frac{m_{e+}}{\sqrt{1-v_2^2}} + \frac{m_{e-}}{\sqrt{1-v_3^2}} \right)^2.$$

Порог реакции будет соответствовать нулевым скоростям электронов и позитрона: $v_1 = v_2 = v_3 = 0$. Отсюда $2E_\gamma^{\text{мин}} m_e + m_e^2 = 9m_e^2$. Следовательно, $E_\gamma^{\text{мин}} = 4m_e = 2,04 \text{ МэВ}$.

- 25.4. Обозначим через P_μ суммарный 4-вектор импульса частиц m и M до соударения в лаб. системе координат. Очевидно, $P_\mu (\sqrt{p^2 + M^2} + m, p)$. Обозначим 4-вектор импульса образовавшейся частицы в системе координат, в которой она покоится, через P'_μ . Тогда из инвариантности квадрата 4-вектора импульса и из закона сохранения импульса следует, что $P_\mu^2 = P'^2_\mu$ или

$$(p^2 + M^2 + 2m \sqrt{p^2 + M^2} + m^2) - p^2 = m^2.$$

Отсюда находим массу покоя новой частицы: $m_1^2 = m^2 + M^2 + 2m \times \sqrt{p^2 + M^2}$. Поскольку импульс частицы p до соударения связан с ее

скоростью соотношением $p = Mv/\sqrt{1-v^2}$, то окончательно находим

$$m_1 = \sqrt{m^2 + M^2 + \frac{2mM}{\sqrt{1-v^2}}}.$$

В нерелятивистском случае, т. е. при $v^2 \ll 1$, $m_1 = m + M$. Скорость новой частицы в лаб. системе координат связана с импульсом p' и энергией $\mathcal{E}'$ частицы соотношением: $V = p'/\mathcal{E}'$. Согласно закону сохранения импульса $p = p'$, а согласно закону сохранения энергии $\mathcal{E}' = m + \sqrt{p^2 + M^2}$. Отсюда

$$V = \frac{Mv}{M + m\sqrt{1-v^2}}.$$

В нерелятивистском случае ($v^2 \ll 1$) получаем известный результат:

$$V = \frac{Mv}{M + m}.$$

К главе 26. Лоренцевы преобразования полей

26.1. В четырехмерной форме имеем $\nabla_\mu F_{\mu\nu} = (1/\epsilon_0) j_\nu$, где $j_\nu(p, j)$ — 4-вектор плотности тока.

26.2. Искомым вектором является 4-вектор с компонентами $f_\mu = F_{\mu\nu} j_\nu$ где $F_{\mu\nu}$ — тензор электромагнитного поля, а j_ν — 4-вектор плотности тока. Временная компонента этого вектора $f_4 = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E})$ равна работе, производимой в единицу времени электрическим полем в единичном объеме вещества.

Пространственные компоненты дают скорость изменения соответствующих компонент импульса единицы объема; иными словами, — это компоненты суммарной силы, действующей на заряды в единичном объеме.

26.3. Используя соотношения, приведенные в табл. 26.2 «Лекций» (вып. 6, стр. 273), нетрудно показать, что $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{E}' \cdot \mathbf{B}')$ и $E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2$, т. е. эти величины инвариантны. Поскольку $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B})$ — инвариант и если векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ образуют острый угол в одной системе координат, т. е. если $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) > 0$, то и во всех других инерциальных системах этот угол будет острым. Оба рассмотренных инварианта равны нулю для электромагнитной волны в пустоте.

26.4. Выберем систему координат так, что ось x параллельна вектору $(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$. Система K' с осями $x'\parallel x$, $y'\parallel y$, $z'\parallel z$ движется с искомой скоростью v . В системе K' имеем $(\mathbf{E}' \times \mathbf{B}') = 0$. Распишем это уравнение в компонентах:

$$x: E'_y B'_z - E'_z B'_y = 0,$$

$$y: E'_x B'_z - E'_z B'_x = 0,$$

$$z: E'_x B'_y - E'_y B'_x = 0.$$

Выразим в этих уравнениях E' и B' через E и B в системе K с помощью лоренцевых преобразований [см. соответствующие формулы преобразования в табл. 26.2 «Лекций» (вып. 6, стр. 273)].

Можно показать, что

$$\begin{aligned}(1 + v^2)(E_y B_x - E_x B_y) - v(B_z^2 + B_y^2 + E_z^2 + E_y^2) &= 0, \\ E_x(B_z + vE_y) - B_x(E_z - vB_y) &= 0, \\ E_x(B_y - vE_z) - B_x(E_y + vB_z) &= 0.\end{aligned}$$

Поскольку система K выбрана так, что $E_x = 0$ и $B_x = 0$, два последних уравнения удовлетворяются автоматически, а из первого уравнения следует, что

$$\frac{v}{1 + v^2} = \frac{(E \times B)_x}{E^2 + B^2}.$$

- 26.5. Рассмотрим систему координат K' , в которой заряд покоится. В этой системе координат $\mathbf{v}' = 0$, $E' = qR'/4\pi\epsilon_0 R'^3$.

Используя формулы лоренцевых преобразований для компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, находим, что в лаб. системе K [см. табл. 26.2 «Лекций» (вып. 6, стр. 277)]; в формулах этой таблицы нужно только заменить v на $-v$]:

$$\begin{aligned}E_x &= \frac{qx'}{4\pi\epsilon_0 R'^3}, \quad E_y = \frac{qy'}{4\pi\epsilon_0 R'^3 \sqrt{1 - v^2}}, \quad E_z = \frac{qz'}{4\pi\epsilon_0 R'^3 \sqrt{1 - v^2}}, \\ B_x &= 0, \quad B_y = -\frac{qvz'}{4\pi\epsilon_0 c^2 R'^3 \sqrt{1 - v^2}}, \quad B_z = \frac{qvy'}{4\pi\epsilon_0 c^2 R'^3 \sqrt{1 - v^2}};\end{aligned}$$

здесь $R'^2 = [(x - vt)^2 + (y^2 + z^2)(1 - v^2)]/(1 - v^2)$ [согласно лоренцевым преобразованиям $x' = (x - vt)/\sqrt{1 - v^2}$, $y' = y$, $z' = z$]. Подставляя выражение для R' в выражения для компонент векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ и вводя обозначение

$$R'^2 = (x - vt)^2 + (1 - v^2)(y^2 + z^2),$$

находим

$$\mathbf{E} = (1 - v^2) \frac{q\mathbf{r}_p}{4\pi\epsilon_0 R'^3}, \quad \mathbf{B} = \mathbf{v} \times \mathbf{E}.$$

Если ввести θ — угол между векторами $\mathbf{r}_p$ $\{x - vt, y, z\}$ и $\mathbf{v}$, то $R'^2 = r_p^2(1 - v^2 \sin^2 \theta)$. Следовательно, векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ можно представить в виде

$$\mathbf{E} = \frac{q\mathbf{r}_p}{4\pi\epsilon_0 r_p^3} \frac{(1 - v^2)}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}},$$

и

$$\mathbf{B} = \frac{q(\mathbf{v} \times \mathbf{r}_p)}{4\pi\epsilon_0 c^2 r_p^3} \frac{(1 - v^2)}{(1 - v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}.$$

- 26.6. См. решение задачи 26.5.

- 26.7. а) В системе координат K , жестко связанной с проводом (в которой положительные ионы покоятся), напряженность электрического поля равна нулю в силу электрической нейтральности провода. Магнитное же поле легко найти:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2\mathbf{l} \times \mathbf{e}_r}{r};$$

здесь $\mathbf{l}$ — вектор силы тока. [По поводу этого выражения см., например, формулу (13.18) в «Лекциях» (вып. 5, стр. 266).] Если ось x направить вдоль вектора $\mathbf{l}$, то $r = \sqrt{y^2 + z^2}$ и

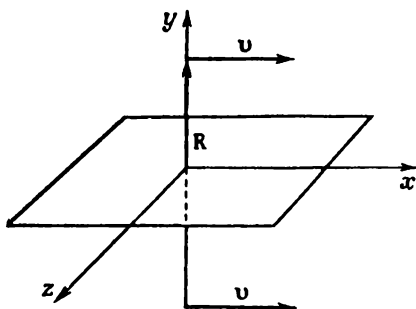
$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2Iz}{r},$$

$$B_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{2Iy}{r}.$$

- б) Чтобы найти поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ в системе координат K' , движущейся вместе с электронами (в этой системе координат электроны покоятся, а положительные ионы движутся), воспользуемся формулами лоренцевых преобразований полей (см. табл. 26.2 «Лекций», вып. 6, стр. 277). В результате получаем

$$\mathbf{B}' = \frac{\mathbf{B}}{\sqrt{1-v^2}}, \quad \mathbf{E}' = \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

- 26.8. Вектор напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, создаваемого бесконечной равномерно заряженной плоскостью, из соображений симметрии направлен перпендикулярно этой плоскости. Величину же его можно определить с помощью теоремы Гаусса. Получаем $E = (\sigma/2\epsilon_0)\mathbf{e}_y$, где $\mathbf{e}_y$ — единичный вектор в направлении оси y (см. рисунок).



На заряд q , движущийся со скоростью $\mathbf{v}$, действует сила Лоренца

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

В рассматриваемой лаб. системе координат $\mathbf{B} = 0$ и, следовательно, $\mathbf{F} = (\sigma q/2\epsilon_0)\mathbf{e}_y$. Заряды отталкивают друг друга с силой Кулона

$$f_y = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{(1-v^2)^2 \sin^2 \theta}{(1-v^2 \sin^2 \theta)^{3/2}}$$

(см. решение задачи 26.5), где θ — угол между $\mathbf{v}$ и радиусом-вектором $\mathbf{R}$, соединяющим два заряда. По условию задачи $\theta = \pi/2$. Поэтому $f_y = (q^2/4\pi\epsilon_0 a^2) \sqrt{1-v^2}$. Движущиеся заряды не будут отклоняться от плоскости, если $F_y = f_y$. Отсюда следует ответ

$$\sigma = \frac{q}{2\pi a^2} \sqrt{1-v^2}.$$

При малых скоростях зарядов $\sigma \approx \sigma_0 = q^2/2\pi a^2$. Поэтому отношение плотности зарядов на поверхности плоскости при релятивистских скоростях электронов к плотности зарядов в нерелятивистском случае равно $\sigma/\sigma_0 = \sqrt{1-v^2}$. Так как энергия частицы, движущейся со скоростью v , $\mathcal{E} = m_e/\sqrt{1-v^2}$, то $\sigma = \sigma_0(m/E)$. Поскольку по условию задачи энергия заряда равна 500 Мэв, то учитывая, что $m_e = 0,5$ Мэв, находим $\sigma/\sigma_0 = 10^{-3}$.

26.9. Пользуясь выражением $u_\mu = dx_\mu/ds$, убеждаемся, что $u_\mu^2 = 1$. Кроме того,

$$f_\mu u_\mu = u_\mu \frac{dp_\mu}{ds} = m_0 u_\mu \frac{du_\mu}{ds} = \frac{1}{2} m_0 \frac{du_\mu^2}{ds} = 0.$$

26.10. а) Прежде всего нужно определить «запаздывающее положение» частицы, т. е. выяснить, на каком этапе движения создается интересующее нас поле. Для этого достаточно ответить на вопрос, какое время больше — затраченное светом для того, чтобы пройти из начала координат в точку (a, a) , или затраченное частицей для того, чтобы достичь точки $(a, 0)$, выйдя тоже из начала координат. Так как $v/c = 0,5$, второе время больше, т. е. поле создается зарядом во время его равномерного движения вдоль оси x .

Электрическое поле равномерно движущегося заряда имеет вид [см., например, решение задачи 26.5 или формулы (26.2), (26.3) и (26.6) «Лекций» (вып. 6, стр. 265, 266)]:

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{x-vt}{\left[\frac{(x-vt)^2}{(1-v^2)} + y^2 + z^2\right]^{3/2}},$$

$$E_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{y}{\left[\frac{(x-vt)^2}{(1-v^2)} + y^2 + z^2\right]^{3/2}},$$

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{1-v^2}} \frac{z}{\left[\frac{(x-vt)^2}{(1-v^2)} + y^2 + z^2\right]^{3/2}}.$$

Согласно условию задачи $z = 0$, $y = a$, $x = a$, $vt_1 = a$, $v = 1/2$. (Здесь считается, что $c = 1$.) Отсюда

$$E_x = E_z = 0, \quad E_y = q/2 \sqrt{3} \pi \epsilon_0 a^2.$$

б) Как было выяснено в п. (а), интересующее нас поле определяется движением частицы вдоль оси x . Оно не зависит от характера движения частицы до прихода ее в начало координат.

К главе 27. Энергия поля и его импульс

27.1. Вычислим $\nabla \times (A \times B)$, выполняя дифференцирование как и для произведения функций:

$$\nabla \times (A \times B) = \nabla_A \times (A \times B) + \nabla_B \times (A \times B).$$

Индексы A и B у ∇ мы приписали для удобства, чтобы яснее отметить тот факт, что при дифференцировании оператор ∇ действует

только на соответствующий вектор, а другой вектор при этом считается постоянным. Далее, замечая, что

$$\nabla_A \times (A \times B) = (B \cdot \nabla_A) A - B (\nabla_A \cdot A),$$

находим окончательно

$$\nabla \times (A \times B) = A (\nabla \cdot B) - B (\nabla \cdot A) + (B \cdot \nabla) A - (A \cdot \nabla) B.$$

Вычислим теперь $\nabla (A \cdot B)$. Для i -й компоненты этого вектора можно написать $\nabla_i A_k B_k = A_k \nabla_i B_k + B_k \nabla_i A_k$. Замечая, что $(A \times (\nabla \times B))_i = A_k \nabla_i B_k - A_k \nabla_k B_i$, находим $A_k \nabla_i B_k = (A \times (\nabla \times B))_i + ((A \cdot \nabla) B)_i$. Отсюда

$$\nabla (A \cdot B) = A \times (\nabla \times B) + B \times (\nabla \times A) + (A \cdot \nabla) B + (B \cdot \nabla) A.$$

- 27.2. Напряженность магнитного поля диполя с магнитным моментом M дается выражением

$$B = \frac{3(MR)R - MR^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 R^5}.$$

Выберем сферическую систему координат, начало которой совпадает с центром Земли, а ось z — с направлением вектора M . Величину M можно определить через магнитное поле B_0 у поверхности Земли на экваторе: $B_0 = M/4\pi\epsilon_0 c^2 R_0^3$, где R_0 — радиус Земли. Считая Землю шаром, вычислим энергию внешнего по отношению к Земле магнитного поля по формуле $W = (\epsilon_0 c^2/2) \int B^2 dV$. Подставляя в эту формулу выражение для B и выполняя интегрирование, можно показать, что $W = 4\pi\epsilon_0 c^2 B_0^2 R_0^3/3 \approx 10^3$ Мт. Отсюда ясно, что по энергетическим соображениям взрыв водородной бомбы в 1 Мт не может существенно исказить магнитное поле Земли.

- 27.3. Напряженность магнитного поля на поверхности провода $B = I/2\pi\epsilon_0 c^2 r$, где I — сила тока, протекающего по проводу. Напряженность электрического поля найдем, воспользовавшись законом Ома: $I = E/R$, где R — сопротивление единицы длины провода. Вычисляя плотность потока энергии, которая равна модулю вектора Пойнтинга, находим $S = \epsilon_0 c^2 E \times B = (\epsilon_0 c^2/R) I \times B$. Поток энергии направлен нормально к поверхности провода (внутри провода).

Интегрирование по поверхности провода единичной длины дает

$$\int (S \cdot n) da = I^2 R.$$

Следовательно, поток вектора Пойнтинга через поверхность прямолинейного провода равен омическим потерям в этом проводе.

- 27.4. Очевидно, что электромагнитное поле будет заключено в пространстве между цилиндрами. Так как цилиндры изготовлены из идеальных проводников, электрическое поле перпендикулярно поверхности цилиндров, т. е. радиально. Магнитное поле B на расстоянии r от оси цилиндров определяем по теореме Стокса ($a < r < b$): $B = I/2\pi\epsilon_0 c^2 r$. Силовые линии магнитного поля представляют собой концентрические окружности с центрами на оси цилиндров. Следовательно, вектор Пойнтинга направлен вдоль оси цилиндров. В решении задачи 6.5 вычислена емкость C , приходящаяся на единицу длины такого кабеля: $C = 2\pi\epsilon_0/\ln(b/a)$. Учитывая, что заряды на цилиндрах связаны с разностью потенциалов V соотношением $q = VC$, и используя теорему

Гаусса, находим, что напряженность электрического поля E в пространстве между цилиндрами равна $E = V/r \ln(b/a)$. Следовательно, для величины вектора Пойнтинга в каждой точке этого пространства получаем

$$|\mathbf{S}| = \epsilon_0 c^2 |\mathbf{E} \times \mathbf{B}| = \frac{IV}{2\pi r^2 \ln(b/a)}.$$

Плотность энергии электромагнитного поля

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} [E^2 + c^2 B^2] = \frac{\epsilon_0 V^2}{2r^2} \left[\frac{1}{\ln^2(b/a)} + \frac{c^2}{R^2 (2\pi\epsilon_0 c^2)^2} \right].$$

Таким образом, скорость распространения энергии равна

$$v = \frac{|\mathbf{S}|}{W} = \frac{2R}{R^2 C + \mathcal{L}},$$

где $\mathcal{L} = \ln(b/a)/2\pi\epsilon_0 c^2$ — емкость единицы длины кабеля (см. решение задачи 17.6). Заметим, что в силу того, что $\mathcal{L}C = 1/c^2$, $v = c$ при $R = \sqrt{\mathcal{L}/C}$.

- 27.5. Антенна длиной $\lambda/4$, помещенная над идеально проводящей плоскостью, эквивалентна рассмотренной в задаче 21.5 антенне длиной $\lambda/2$ (мы учли зеркальное отображение антенны длиной $\lambda/4$). Поэтому воспользуемся найденными в решении задачи 21.5 выражениями для напряженностей электрического и магнитного полей на большом расстоянии от антенны (поля над плоскостью):

$$E_\theta = \frac{\alpha}{r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \cos\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right],$$

$$B_\varphi = \frac{1}{c} E_\theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

В этих выражениях постоянную α мы должны определить из условий задачи. С этой целью вычислим вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \frac{\epsilon_0 c \alpha^2}{r^2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right].$$

Тогда мощность, излучаемая антенной, равна среднему по времени потоку вектора Пойнтинга:

$$W = \epsilon_0 c \alpha^2 \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2\left[\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] dt \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} \sin \theta\right)}{\sin^2 \theta} 2\pi \sin \theta d\theta.$$

В решении задачи 21.5 отмечалось, что $\cos[(\pi/2) \cos \theta]/\sin \theta$ хорошо аппроксимируется функцией $\sin \theta$. Используя это и учитывая, что $\cos^2[\omega(t - r/c)] = 1/2$, находим $W = (2\pi/3) \epsilon_0 c \alpha^2$. Следовательно, $\alpha = \sqrt{3W/2\pi\epsilon_0 c}$.

- а) На поверхности Земли, т. е. при $\theta = \pi/2$, среднее значение по времени вектора Пойнтинга равно

$$\bar{S} = \frac{3W}{2\pi r^2} \cos^2 \omega\left(t - \frac{r}{c}\right) = 2,4 \cdot 10^{-5} \text{ вт/м}^2.$$

- б) Используя найденное выражение для α , находим максимальные значения напряженностей электрического и магнитного полей:

$$E_{\theta} \left(r, \theta = \frac{\pi}{2} \right)_{\text{макс}} = \frac{\alpha}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{3W}{2\pi\epsilon_0 c}},$$

$$B_{\varphi} \left(r, \theta = \frac{\pi}{2} \right)_{\text{макс}} = \frac{\alpha}{cr} = \frac{1}{cr} \sqrt{\frac{3W}{2\pi\epsilon_0 c}}.$$

- 27.6. а) Граничные условия требуют, чтобы на стенках волновода обращались в нуль тангенциальные составляющие вектора $\mathbf{E}$ и нормальные составляющие вектора $\mathbf{B}$. Эти условия выполняются, поскольку $E_y(x=0, a) = 0$, $E_x(y=0, b) = 0$, $B_y(y=0, b) = 0$ и $B_x(x=0, a) = 0$.

- б) Вектор Пойнтинга

$$\mathbf{S} = \epsilon_0 c^2 \mathbf{E} \times \mathbf{B} = \epsilon_0 c^2 E_0^2 \left[\mathbf{e}_z \frac{k_z}{\omega} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos^2 (\omega t - k_z z) - \right. \\ \left. - \mathbf{e}_x \frac{\pi}{\omega a} \cos \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin \left(\frac{\pi x}{a} \right) \frac{1}{2} \sin 2 (\omega t - k_z z) \right].$$

Плотность энергии

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} (\mathbf{E}^2 + c^2 \mathbf{B}^2) = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{2} \left[\sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos^2 (\omega t - k_z z) + \right. \\ \left. + \frac{k_z^2 c^2}{\omega^2} \sin^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \cos^2 (\omega t - k_z z) + \frac{c^2 \pi^2}{\omega^2 a^2} \cos^2 \left(\frac{\pi x}{a} \right) \sin^2 (\omega t - k_z z) \right].$$

- в) Усредняя выражение для S_z по времени и по сечению волновода, находим

$$\langle S_z \rangle_{t, x} = \frac{1}{a} \int_0^a \langle S_z \rangle_t dx = \frac{k_z}{\omega} \frac{\epsilon_0 c^2}{4} E_0^2 \mathbf{e}_x.$$

- г) Усредняя U по времени и по объему волновода, находим среднюю плотность энергии в волноводе:

$$\langle U \rangle_{t, x} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{8} \left[1 + \frac{c^2 k_z^2}{\omega^2} + \frac{c^2 \pi^2}{\omega^2 a^2} \right].$$

Используя соотношение $k_z = \sqrt{(\omega^2/c^2) - (\pi^2/a^2)}$ [см. формулы (24.13), (24.16) «Лекций», вып. 6], имеем

$$\langle U \rangle_{t, x} = \frac{\epsilon_0 E_0^2}{4}.$$

- д) Средняя скорость распространения энергии совпадает с групповой скоростью. Действительно,

$$\mathbf{v} = \frac{\langle \mathbf{S} \rangle_{t, x}}{\langle U \rangle_{t, x}} = c^2 \frac{k_z}{\omega} \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z c \sqrt{1 - \frac{\pi^2 c^2}{a^2 \omega^2}} = v_{\text{гр}}$$

[ср. формулу (24.27) «Лекций», вып. 6, стр. 232].

- 27.7. а) Вектор Пойнтинга равен $S = \epsilon_0 c^2 (E \times B) = \epsilon_0 c^3 B^2 n$. Магнитное поле осциллирующего диполя дается выражением [см., например, формулу (21.23) «Лекций», вып. 6, стр. 155]

$$B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^3 r} \ddot{p} \times n,$$

где n — единичный вектор в радиальном направлении. Следовательно,

$$S = \frac{p^2 \omega^4 \sin^2 \theta \cos^2 \omega t}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2} n$$

(θ — угол между векторами p и n).

- б) Действительно, средняя по времени излучаемая мощность

$$W = \oint \bar{S} d\sigma = \frac{p^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 c^3}$$

(здесь мы учли, что $\overline{\cos^2 \omega t} = 1/2$).

- 27.8. Считая, что на электрон действует только электрическое поле волны $E = E_0 \exp(i\omega t)$, из уравнения движения $m\ddot{r} = qE_0 \exp(i\omega t)$ определим дипольный момент колеблющегося электрона. Аналогично предыдущей задаче найдем вектор Пойнтинга:

$$S = \frac{q^4 E_0^2 \sin^2 \theta}{2(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 r^2 m^2} n.$$

Если ввести угол θ между векторами n и E , то поток излучаемой энергии в элемент $d\Omega$ телесного угла можно записать в виде

$$dI = |S| d\Omega = \frac{q^4 E^2}{2(4\pi)^2 \epsilon_0 c^3 m^2} \sin^2 \theta d\Omega.$$

Разделив этот поток на плотность энергии в падающей волне $I = (1/2) \epsilon_0 c E_0^2$, получим дифференциальное сечение рассеяния электромагнитной волны электроном:

$$d\sigma = \frac{dI}{I} = \left(\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 m} \right)^2 \sin^2 \theta d\Omega.$$

Полное сечение рассеяния дается выражением

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2,$$

где $e^2 = q^2/4\pi\epsilon_0$.

- 27.9. Сила светового давления на частицу записывается в виде

$$F = \frac{S_1}{S_0} \frac{W}{c} (1 + \beta),$$

где S_1 — площадь поперечного сечения шарика радиусом r ; $S_0 = 4\pi R^2$ (R — расстояние частицы от Солнца); W — энергия, излучаемая Солнцем в единицу времени; β — коэффициент отражения (по условию задачи $\beta = 0$). Сила гравитационного притяжения равна

$$F_1 = \frac{GMm}{R^2};$$

здесь m — масса частицы, M — масса Солнца ($M = 2 \cdot 10^{30}$ кг), G — гравитационная постоянная ($G = 6,67 \cdot 10^{-8}$ м³/кг·сек²). В равновесии

будут находиться лишь те частицы, радиус которых удовлетворяет условию $F_1 = F$. Отсюда находим

$$r = \frac{3}{16\pi} \frac{W}{GMr c}$$

(ρ — плотность массы частицы). Считая $\rho \approx 1 \text{ г/см}^3$, оцениваем радиус частицы: $r_0 \approx 6 \cdot 10^{-8} \text{ см} = 6 \text{ \AA}$. Под действием светового давления частицы радиусом $r < r_0$ будут отклоняться от Солнца. Таким образом, обычное объяснение происхождения хвостов комет вполне разумно.

- 27.10. а) Учитывая то, что $r \ll R$, магнитное поле внутри торондальной катушки можно приближенно считать однородным по поперечному сечению. Выбрав в качестве контура интегрирования среднюю линию торонда, с помощью теоремы Стокса имеем

$$B = \frac{NKt}{2\pi e_0 c^2 R}.$$

Выберем в поперечном сечении торонда контур интегрирования в форме окружности радиусом ρ ($0 \leq \rho \leq r$). Поскольку мы считаем магнитное поле однородным по сечению, магнитный поток через этот контур можно записать в виде

$$\Phi = \pi \rho^2 B = \frac{\pi \rho^2}{2\pi e_0 c^2} \frac{NKt}{R}.$$

Следовательно, э. д. с. в этом контуре

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\pi \rho^2 NK}{2\pi e_0 c^2 R}.$$

С другой стороны, можно приближенно считать электрическое поле E одинаковым по величине во всех точках средней линии торонда. Тогда, интегрируя поле вдоль этого контура, находим

$$\mathcal{E} = \int E_t ds = E_t \cdot 2\pi \rho$$

(направление вектора E в каждой точке контура показано на рисунке, где изображен один виток торондальной катушки). Таким образом,

$$E_t = - \frac{\rho NK}{2\pi e_0 c^2 R}.$$

Энергия, запасенная в торондальной катушке к моменту времени t , равна

$$W = \frac{e_0}{2} \int (E^2 + c^2 B^2) dV = \frac{r^2}{4e_0 c^2} \frac{N^2 K^2}{R} \left[t^2 + \frac{r^2}{2c^2} \right].$$

- б) Найдем направление и величину вектора Пойнтинга на поверхности торонда. В п. (а) мы определили величины полей E и B . Направления E и B таковы, что вектор Пойнтинга S в любой точке на поверхности торонда нормален к поверхности и направлен внутрь торонда. Кроме того, в любой точке $E \perp B$. Следовательно, модуль вектора Пойнтинга

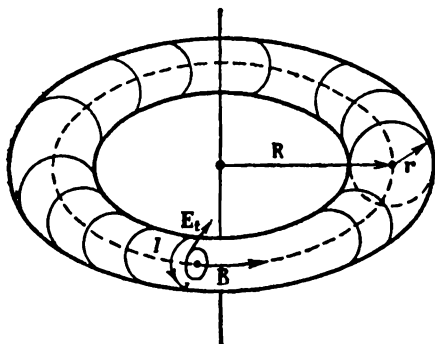
$$S = e_0 c^2 EB = \frac{rt}{8\pi^2 e_0 c^2 R^2} (NK)^2.$$

Отсюда находим полную мощность поглощаемой торондом энергии, которая равна потоку вектора Пойнтинга через поверхность торонда (последняя приближенно равна $2\pi r \cdot 2\pi R$):

$$\int (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) da = - \frac{\pi r^2 t (NK)^2}{2\pi \epsilon_0 c^2 R}.$$

Этот результат верен, поскольку выполняется условие

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_{\Sigma} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) da.$$



К главе 28. Электромагнитная масса

28.1. Электростатическая энергия $U_{эл}$ равномерно заряженного шара радиусом a вычислена в «Лекциях» (вып. 5, стр. 154):

$$U_{эл} = \frac{3q_e^2}{5 \cdot 4\pi \epsilon_0 a} = \frac{3}{5} \frac{e^2}{a}.$$

Приравнявая $U_{эл}$ энергии покоя электрона $m_e c^2$, находим

$$a = \frac{3}{5} \frac{e^2}{m_e c^2} = 1,69 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

Если заряд распределен равномерно по поверхности шара, то (см. § 1, гл. 28 «Лекций», вып. 6)

$$U_{эл} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{a}$$

и

$$a = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m_e c^2} = 1,41 \cdot 10^{-13} \text{ см.}$$

28.2. Момент количества движения электромагнитного поля определяется выражением

$$\mathbf{L} = e_0 \int (\mathbf{r} \times \mathbf{E} \times \mathbf{B}) dV.$$

Согласно условию задачи, электрическое и магнитное поля имеют вид

$$E = \begin{cases} 0, & r < a, \\ \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0} \frac{r}{r^3}, & r > a, \end{cases} \quad B = \frac{3r(r \cdot \mu) - \mu r^2}{4\pi\epsilon_0 c^2 r^5}.$$

Подставим выражения для E и B в формулу для L и проинтегрируем по всему пространству в сферической системе координат. В результате найдем

$$a) L = \frac{2}{3} \frac{q_e \mu}{4\pi\epsilon_0 c^2 a}.$$

$$б) \frac{L}{\mu} = \frac{2}{3} \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0 c^2 a} = \frac{m}{q_e}$$

$$[\text{где } m = (2/3) (q_e^2 / 4\pi\epsilon_0 c^2 a)].$$

в) Будем считать, что заряд электрона равномерно «размазан» по поверхности сферы и что сфера вращается с угловой скоростью ω . В этих предположениях задача аналогична задаче 14.6. Если воспользоваться решением последней, положив $4\pi\epsilon_0 Va = q_e$, то мы сразу получим искомый результат $\mu = \omega q_e a^2 / 3$. Отсюда $\omega = 3\mu / a^2 q_e$. Максимальная скорость электрона на поверхности — это его линейная скорость на экваторе сферы: $v_{\text{макс}} = \omega a = 3\mu / a q_e$. Так как по условию задачи

$$\mu = \frac{\hbar q_e}{2m} = \frac{3}{4} \frac{q_e a c}{a},$$

то

$$v_{\text{макс}} = \frac{9c}{4a} \gg c.$$

Следовательно, собственный магнитный момент электрона нельзя объяснить с позиций классической физики — как магнитный момент вращающейся твердой сферы с радиусом, равным электромагнитному радиусу электрона, и с зарядом электрона.

К главе 29. Движение зарядов в электрическом и магнитном полях

29.1. а) Уравнения движения заряда:

$$\frac{dp_x}{dt} = qE, \quad \frac{dp_y}{dt} = 0,$$

т. е. $p_x = qEt$, $p_y = 0$.

Следовательно, $v_y = 0$, а для v_x имеем

$$qEt = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - (v_x^2/c^2)}},$$

откуда

$$v_x = \frac{cqEt}{\sqrt{m^2 c^2 + (qEt)^2}}.$$

Таким образом, при малых временах $v \sim t$, а при $t > mc/qE$ частица движется практически равномерно со скоростью, близкой к скорости света. Интегрируя, находим

$$x(t) = \int_0^t v(t) dt = \frac{c}{qE} (\sqrt{m^2 c^2 + (qEt)^2} - mc).$$

б) В этом случае

$$p_x = qEt, \quad p_y = p_0 = \frac{mv_0}{\sqrt{1 - (v_0^2/c^2)}}.$$

С другой стороны

$$p_x = \frac{mv_x}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2}}}, \quad p_y = \frac{mv_y}{\sqrt{1 - \frac{v_x^2}{c^2} - \frac{v_y^2}{c^2}}},$$

откуда

$$\frac{v_y}{v_x} = \frac{p_y}{p_x} = \frac{p_0}{qEt}.$$

Видно, что $v_y \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Для зависимости $v_x(t)$ имеем

$$v_x(t) = \frac{qEt}{\sqrt{m^2 c^2 + p_0^2 + (qEt)^2}}.$$

Переход к движению со скоростью, близкой к скорости света происходит теперь через промежуток времени порядка $\sqrt{(m^2 c^2 + p_0^2)/qE}$, т. е. несколько позже. Зависимость $x(t)$ имеет в остальном тот же характер, что и раньше. Что касается зависимости $y(t)$, то $y \sim t$ при малых временах и $y \sim \ln t$ при $t \gg \sqrt{m^2 c^2 + (p_0^2/qE)}$.

29.2. В циклотроне протоны движутся в постоянном однородном магнитном поле $B = \text{const}$. Направим ось z в направлении вектора $\mathbf{B}$. Уравнения движения имеют вид

$$\dot{p}_x = qv_y B, \quad \dot{p}_y = -qv_x B, \quad \dot{p}_z = 0.$$

При этом энергия протонов $\mathcal{E} = \text{const}$, так как $\mathbf{F} \perp \mathbf{V}$. Поскольку $\mathcal{E} = mc^2/\sqrt{1 - (v^2/c^2)}$ и $\mathbf{p} = \mathcal{E}\mathbf{v}/c^2$, уравнения движения принимают вид

$$\dot{v}_x = \frac{qBc^2}{\mathcal{E}} v_y, \quad \dot{v}_y = -\frac{qBc^2}{\mathcal{E}} v_x.$$

Умножая второе уравнение на мнимую единицу и складывая его с первым, для комплексной скорости $z = v_x + iv_y$ получаем уравнение $\dot{z} + i\omega z = 0$, где частота $\omega = qBc^2/\mathcal{E} = (qB/m) \sqrt{1 - (v^2/c^2)}$. Если протоны движутся медленно, то $v^2 \ll c^2$ и циклотронная частота имеет обычный вид $\omega = qB/m$. При увеличении энергии протонов циклотронная частота уменьшается. Так как $\Delta\omega/\omega = -\Delta\mathcal{E}/\mathcal{E}$, то при изменении циклотронной частоты на 1% энергия изменится также на 1%.

- 29.3. а) Движение частицы предполагается нерелятивистским; следовательно, импульс частицы связан с ее скоростью обычным соотношением

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}.$$

Уравнение движения и начальные условия имеют вид

$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}),$$

$$x(0) = y(0) = z(0) = 0, \quad \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0.$$

Уравнение движения в компонентной форме записывается в виде

$$\ddot{x} = \frac{qB}{m} \dot{y}, \quad \ddot{y} = \frac{qE}{m} - \frac{qB}{m} \dot{x}, \quad \ddot{z} = 0.$$

Из последнего уравнения с учетом начальных условий следует, что $z(t) = 0$, т. е. движение происходит в плоскости xy . Если сложить первые два уравнения, предварительно умножив обе части второго уравнения на мнимую единицу и ввести обозначения $\omega = qB/m$, $x + iy = \eta$, то получим одно уравнение $\ddot{\eta} + i\omega\dot{\eta} = iqE/m$. Решением этого уравнения является сумма решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения. Решение однородного уравнения $\ddot{\eta}_0 + i\omega\dot{\eta}_0 = 0$ можно представить в виде $\eta_0 = C \exp(-i\omega t)$, где комплексную константу C можно представить в виде произведения ее модуля на фазовый множитель: $C = a \exp(i\varphi)$. В качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять $\eta_1 = qEt/m\omega$. Таким образом,

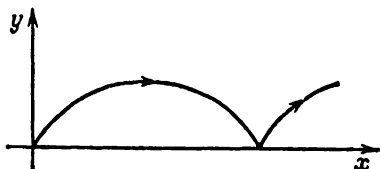
$$\eta = a e^{-i\omega t + i\varphi} + \frac{qE}{m\omega} t \equiv x + iy.$$

Разделяя мнимую и вещественную части и учитывая начальные условия, окончательно находим

$$x = \frac{qE}{m\omega^2} (\omega t - \sin \omega t),$$

$$y = \frac{qE}{m\omega^2} (1 - \cos \omega t).$$

Следовательно, траектория в плоскости xy является циклоидой (см. рисунок). Вычисляя производную $\dot{x} = (qE/m\omega)(1 - \cos \omega t)$, мы видим, что предположение о нерелятивистском характере движения справедливо, если $qE/m\omega \ll c$, т. е. $E/Bc \ll 1$.



- б) Рассмотрим решение $y(t) = (qE/m\omega^2)(1 - \cos \omega t)$, найденное в п. (а) нашей задачи. Условие того, что частица не попадает на анод, записывается в виде $y_{\max} < d$. Отсюда следует, что должно

выполняться неравенство

$$\frac{2qE}{m\omega^3} < d \quad \text{или} \quad B > \sqrt{\frac{2mc^3E}{qd}}.$$

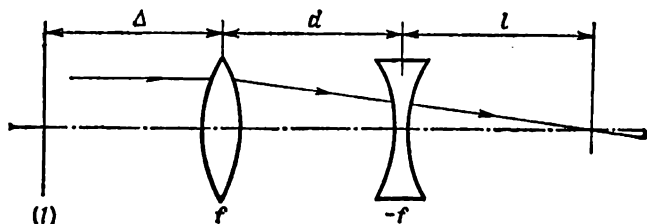
- 29.4. Можно считать, что пучок параллельных лучей, идущий вдоль оптической оси, собирается левой линзой в точку в ее фокусе, а затем эта точка отображается правой линзой. Расстояние от «точки» до рассеивающей линзы равно $d - f$ (оно отрицательно, если $f > d$, т. е. если «точка» расположена правее линзы). Применяя основную формулу линзы (см. § 3 гл. 27 «Лекций», вып. 3), имеем

$$\frac{1}{d-f} + \frac{1}{l} = -\frac{1}{f},$$

откуда

$$l = \frac{f(f-d)}{d}.$$

Изображение действительно, если $l > 0$, т. е. если $f > d$.



К главе 32. Показатель преломления плотного вещества

32.1. То, что квадрат показателя преломления n^2 равен диэлектрической проницаемости ϵ , справедливо для любых изотропных сред. В этом можно убедиться, показав, что на соотношение между n^2 и ϵ конкретные свойства частиц вещества не влияют.

Уравнения Максвелла в диэлектрике, в котором нет других зарядов, кроме тех, которые связаны в атомах, имеют вид

$$\begin{aligned} \text{а) } \nabla \cdot \mathbf{E} &= -\frac{\nabla \cdot \mathbf{P}}{\epsilon_0}, & \text{б) } c^2 \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{P}/\epsilon_0 + \mathbf{E}), \\ \text{в) } \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \text{г) } \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Как указывалось в § 3 гл. 32 «Лекций» (вып. 7), эти уравнения допускают волновые решения. Будем искать эти решения в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, & \mathbf{B} &= \mathbf{B}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}, \\ \mathbf{P} &= \mathbf{P}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}. \end{aligned}$$

При этом, если ввести вектор электрической индукции $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, то уравнения Максвелла принимают вид

$$\begin{aligned} \text{а) } \mathbf{k} \cdot \mathbf{D} &= 0, & \text{б) } \epsilon_0 c^2 \mathbf{k} \times \mathbf{B} &= -\omega \mathbf{D}, \\ \text{в) } \mathbf{k} \times \mathbf{E} &= \omega \mathbf{B}, & \text{г) } \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned}$$

Умножая векторно уравнение (в) на $\mathbf{k}$ и используя уравнение (б), получаем

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{E}) = -\frac{\omega^2}{c^2} \mathbf{D},$$

или

$$\mathbf{D} = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left(\mathbf{E} - \frac{\mathbf{k} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{E})}{k^2} \right).$$

Так как электрическая волна поляризована в направлении, перпендикулярном $\mathbf{k}$, то $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ и $\mathbf{D} = n^2(\omega) \mathbf{E}$, где $n^2(\omega) = c^2 k^2 / \omega^2$. Но, с другой стороны, для волны с частотой ω в «линейном» приближении $\mathbf{D} = \epsilon(\omega) \mathbf{E}$ (это приближение справедливо, если электрические поля в диэлектрике слабы по сравнению с электрическими полями в атомах и молекулах; для лазерного луча, падающего на диэлектрик, возникает необходимость учета нелинейной связи $\mathbf{D}$ с $\mathbf{E}$, т. е. учитывать в разложении $\mathbf{D}$ относительно $\mathbf{E}$ члены, квадратичные по $\mathbf{E}$, кубичные

и т. д.). Следовательно, $\epsilon(\omega) = \epsilon_0 n^2(\omega)$. Полагая в этом соотношении $\omega = 0$ и учитывая, что $\epsilon(0) = \epsilon_0 \kappa$, находим для всех изотропных веществ

$$\kappa = n^2(0).$$

- 32.2. Квадрат показателя преломления плазмы в ионосфере дается выражением (см. «Лекции», вып. 7, стр. 67) $n^2 = 1 - Nq_e^2/m\epsilon_0\omega^2$. При $\omega > \omega_p$, где $\omega_p = \sqrt{Nq_e^2/m\epsilon_0}$ — плазменная частота, ионосфера становится прозрачной, поскольку при этом условии показатель преломления является вещественным числом. Отсюда плотность свободных электронов в ионосфере равна

$$N = \frac{m\epsilon_0\omega_p^2}{q_e^2} = 1,1 \cdot 10^4 \text{ см}^{-3}.$$

- 32.3. Электрическое поле, действующее на электроны проводимости, равно среднему полю E . Следовательно, полагая в уравнении (32.1) «Лекций» (вып. 7, стр. 50) $\omega_0 = 0$, для скорости дрейфа электронов $v_{\text{дрейф}} = \dot{x}$ можно написать следующее уравнение:

$$\frac{dv_{\text{дрейф}}}{dt} = \frac{q_e E}{m} - \frac{v_{\text{дрейф}}}{\tau}.$$

Когда поле E постоянно действует на электроны проводимости, $dv_{\text{дрейф}}/dt = 0$, для скорости дрейфа получаем

$$v_{\text{дрейф}}^{(0)} = \frac{q_e E}{m} \tau$$

[см. формулу (32.39) «Лекций», вып. 7, стр. 63].

Если же в момент времени $t = 0$ электрическое поле мгновенно выключается, скорость дрейфа электронов изменяется в соответствии с однородным дифференциальным уравнением

$$\frac{dv_{\text{дрейф}}}{dt} = - \frac{v_{\text{дрейф}}}{\tau}.$$

Решая это уравнение, находим

$$v_{\text{дрейф}} = \frac{q_e E}{m} \tau e^{-t/\tau}.$$

Это решение отвечает начальному условию задачи, согласно которому $v_{\text{дрейф}} = v_{\text{дрейф}}^{(0)}$ при $t = 0$. Отсюда видно, что время, за которое величина скорости дрейфа уменьшится в e раз, в точности равно τ — среднему времени между соударениями.

- 32.4. Из уравнения Максвелла $\partial \mathbf{B} / \partial t = -\nabla \times \mathbf{E}$ находим $\partial B_x / \partial t = 0$, $\partial B_y / \partial t = ikE_0 \exp[i(\omega t - kz)]$, $\partial B_z / \partial t = 0$.

Отсюда

а) $B_x = 0$, $B_y = \frac{k}{\omega} E_0 e^{i(\omega t - kz)}$, $B_z = 0$.

б) $\mathbf{E} \perp \mathbf{B}$.

в) Волновой вектор для рассматриваемых волн можно записать в виде

$$k = (1 - i) \sqrt{\frac{\sigma\omega}{2\epsilon_0 c^2}} = \sqrt{\frac{\sigma\omega}{\epsilon_0 c^2}} e^{-i\pi/4}.$$

Отсюда видим, что разность фаз равна $-\pi/4$.

32.5. Более правдоподобную аппроксимацию n^2 можно получить, если воспользоваться выражением для показателя преломления в виде $n^2 = 1 + (\sigma/\epsilon_0)/i\omega(1 + i\omega\tau)$ [см. формулу (32.42) «Лекций», вып. 7, стр. 64]. Отсюда замечаем, что n^2 даже для частот $\omega > \sigma/\epsilon_0\tau$ имеет мнимую часть.

К главе 33. Отражение от поверхности

33.1. а) В области 1 распространяются падающая волна, амплитуду которой примем равной единице, и отраженная волна с амплитудой b_1 . В области 2 одна волна с амплитудой a_2 распространяется вправо, а другая волна с амплитудой b_2 — влево. В области 3 имеется лишь прошедшая волна, амплитуду которой обозначим через a_3 . Записывая плоские волны в виде $E = a \exp \left[i \left(\omega t \mp \frac{n\omega}{c} z \right) \right]$, получаем из условий непрерывности на границах раздела тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей (среды считаем немагнитными) следующую систему уравнений:

$$1 + b_1 = a_2 + b_2,$$

$$1 - b_1 = \frac{n_2}{n_1} (a_2 - b_2),$$

$$a_2 e^{-i \frac{n_2 \omega}{c} l} + b_2 e^{i \frac{n_2 \omega}{c} l} = a_3 e^{-i \frac{n_3 \omega}{c} l},$$

$$a_2 e^{-i \frac{n_2 \omega}{c} l} - b_2 e^{i \frac{n_2 \omega}{c} l} = \frac{n_3}{n_2} a_3 e^{-i \frac{n_3 \omega}{c} l}.$$

Решая эту систему, находим выражение для квадрата амплитуды прошедшей волны:

$$|a_3|^2 = 16n_1^2 n_2^2 \left[(n_1 + n_2)^2 (n_2 + n_3)^2 + (n_1 - n_2)^2 (n_2 - n_3)^2 + \right. \\ \left. + 2(n_1^2 - n_2^2)(n_2^2 - n_3^2) \cos \left(2 \frac{n_2 \omega l}{c} \right) \right]^{-1}.$$

б) При $l = \lambda_2/4 = \pi c/2n_2\omega$ и $n_2^2 = n_1 n_3$ из системы уравнений, приведенной выше, и из выражения для $|a_3|^2$ следует, что $b_1 = 0$, а $|a_3|^2 = n_1/n_3$, т. е. плотность потока энергии в падающей слева на промежуточный слой волне $|S_1| \sim n_1 E_1^2 = n_1$ равна плотности потока энергии прошедшей волны

$$|S_3| \sim n_3 |a_3|^2 = n_3 \frac{n_1}{n_3} = n_1,$$

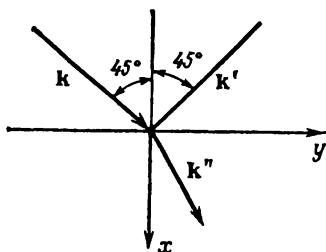
т. е. коэффициент пропускания равен 1.

в) Толщина l в случае обычного бинокля $\lambda/4n_2 = 1200 \text{ \AA}$.

г) Из предыдущего анализа ясно, что для просветления линзы безразлично, какую ее сторону покрывать. При просветлении должно выполняться соотношение $n_2^2 = n_1 n_3$. Просветление осуществляется, как в случае $n_1 = 1$, $n_2^2 = n_3$ (покрывается внешняя сторона линзы), так и в случае $n_3 = 1$, $n_2^2 = n_1$ (покрывается внутренняя сторона).

33.2. Выберем систему координат так, как показано на рисунке. Тогда для падающей волны мы можем написать

$$E_1 = E_{01} \exp \left[i \left(\omega t - \frac{\omega n_1}{c} y \sin \alpha - \frac{\omega n_1}{c} x \cos \alpha \right) \right].$$



Отраженная и преломленная волны записываются соответственно в виде

$$E_2 = E_{02} \exp \left[i \left(\omega t - \frac{\omega n_1}{c} y \sin \beta + \frac{\omega n_1}{c} x \cos \beta \right) \right]$$

и

$$E_3 = E_{03} \exp \left[i \left(\omega t - \frac{\omega n_2}{c} y \sin \gamma - \frac{\omega n_2}{c} x \cos \gamma \right) \right].$$

На границе поле E непрерывно. Поэтому

$$\begin{aligned} E_{01} \exp \left(- \frac{\omega n_1}{c} y \sin \alpha \right) + E_{02} \exp \left(- \frac{\omega n_1}{c} y \sin \beta \right) = \\ = E_{03} \exp \left(- \frac{i \omega n_2}{c} y \sin \gamma \right). \end{aligned}$$

Поскольку x произвольно, из последнего уравнения следует, что $\sin \alpha = \sin \beta$, $\sin \alpha / \sin \gamma = n_2 / n_1$. Отсюда

$$\cos \gamma = \pm \sqrt{1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \alpha}.$$

По условию задачи $n_1/n_2 = 1,6$, $\sin^2 \alpha = 0,5$ ($\alpha = \beta = 45^\circ$) и, следовательно, $\cos \gamma = \pm \sqrt{-0,28} \approx \pm i0,53$. Подставляя найденное значение $\cos \gamma$ в выражение для E_3 , получаем ($n_2 = 1$)

$$E_3 \sim \exp \left(\pm 0,53 \frac{\omega}{c} z \right) = \exp \left(\pm 0,53 \frac{2\pi z}{\lambda} \right).$$

Верхнему знаку отвечает экспоненциально нарастающее поле, нижнему — убывающее. Оставляя из физических соображений последнее решение, находим, что в воздухе за большой гранью призмы электрическое поле волны убывает в e раз на расстоянии $x = 0,3\lambda = 1350 \text{ \AA}$. Если вектор E лежит в плоскости падения, результат будет точно таким же.

К главе 34. Магнетизм вещества

34.1. Сила, действующая на частицу в переменном магнитном поле, дается выражением

$$\mathbf{F} = q [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}].$$

Электрическое поле E вызвано изменяющимся магнитным полем. Если напряженность электрического поля мала, то частица движется приблизительно по окружности, радиус которой равен $R = p/qB$ (p — импульс частицы). Момент количества движения частицы при этом равен $J = pR = qBR^2$. Электрическое поле вызывает изменение абсолютной величины импульса: $dp/dt = qE$, откуда $dJ/dt = qER$. Величину E можно вычислить, пользуясь теоремой Стокса:

$$E \cdot 2\pi R = -\pi R^2 \frac{dB}{dt}.$$

Отсюда следует

$$E = -\frac{R}{2} \frac{dB}{dt},$$

$$\frac{dJ}{dt} = -\frac{qR^2}{2} \frac{dB}{dt} \quad \text{или} \quad \frac{1}{J} \frac{dJ}{dt} = -\frac{1}{2B} \frac{dB}{dt}.$$

Наше рассуждение годится только в том случае, когда частица движется по круговой орбите, т. е. если $T(dJ/dt)/J = (T/2)(dB/dt)/B \ll 1$, где T — период обращения частицы по орбите. Это условие означает, что характерное время изменения поля должно быть во много раз больше периода обращения частицы по орбите.

К главе 35. Парамагнетизм и магнитный резонанс

35.1. В магнитном поле напряженностью B протон вращается по круговой орбите с ларморовой частотой ω_L , не зависящей ни от радиуса орбиты, ни от скорости частицы (при $v/c \ll 1$), причем $\omega_L = qB/m_p$. Выразим величину B через период обращения $T = 2\pi/\omega_L$:

$$B = \frac{2\pi m_p}{qT}.$$

Частота ядерного магнитного резонанса дается выражением (см. § 6 «Лекций», вып. 7, стр. 129)

$$\omega_p = g \frac{q}{2m_p} B = \frac{g}{2} \omega_L.$$

Отсюда

$$g = \frac{2\omega_p}{\omega_L} = 2\nu_p T,$$

где $\nu_p = \omega_p/2\pi$. Подставляя численные значения для ν_p и T , приведенные в условии задачи, находим $g = 5,46$.

- 35.2. Теорию классического парамагнетизма можно построить аналогично классической теории диэлектрической проницаемости. Энергия магнитного момента μ в магнитном поле равна $-\mu B \cos \theta$, где θ — угол между векторами μ и B . В статистической физике число моментов, угол наклона которых к оси z (последняя выбрана совпадающей с вектором B) равен θ , приходящееся на единичный телесный угол, вычисляется по формуле

$$n(\theta) = n_0 e^{\mu B \cos \theta / kT}.$$

Считая магнитное поле малым по величине, так что $\mu B / kT \ll 1$, разложим в выражении для $n(\theta)$ экспоненту в ряд и ограничимся первыми двумя членами разложения:

$$n(\theta) = n_0 \left[1 + \frac{\mu B \cos \theta}{kT} \right].$$

Интегрируя это выражение по всем телесным углам, получаем, что полное число моментов $N = 4\pi n_0$. Полный магнитный момент определим следующим образом (k — единичный вектор в направлении B):

$$M = \int (\mu \cdot k) n(\theta) d\Omega = -k \int \mu \cos \theta n(\theta) 2\pi \sin \theta d\theta.$$

Вычисляя, находим

$$M = \frac{N\mu^2}{3kT} B.$$

Подобная теория классического парамагнетизма не противоречит утверждению о том, что в рамках классической физики парамагнетизм вообще отсутствует. Просто классическая физика не может обосновать существование у каждого атома собственного магнитного момента (спина) μ . Наличие его представляет собой чисто квантовый эффект.

- 35.3. Избыток параллельных полю спинов можно найти, используя формулу (35.21) «Лекций» (вып. 7, стр. 125) для магнитного момента единичного объема M , если поделить M на магнитный момент одного атома:

$$\frac{N_{\text{изб}}}{N} = \tanh \frac{\mu_0 B}{kT}.$$

При $T = 300$ К отношение $\mu_0 B / kT = 2,3 \cdot 10^{-3}$ и, следовательно, $N_{\text{изб}}/N = \tanh 0,0023 \approx 0,23\%$. При $T = 4,2$ К имеем $\mu_0 B / kT = 0,16$ и $N_{\text{изб}}/N = 15,9\%$.

- 35.4. Для решения задачи воспользуемся формулами (35.10)–(35.21) «Лекций» (вып. 7). Введем следующее обозначение:

$$\mu_0 = g \left(\frac{q_e \hbar}{2m} \right).$$

Тогда энергии, соответствующие различным проекциям спина в магнитном поле, равны $U = -\mu_0 B$ для $J_z / \hbar = +1$, $U = 0$ для $J_z / \hbar = 0$ и $U = +\mu_0 B$ для $J_z / \hbar = -1$. Согласно статистической механике,

$$N_{+1} = n_0 \exp(\mu_0 B / kT), \quad N_0 = n_0, \quad N_{-1} = n_0 \exp(-\mu_0 B / kT).$$

Постоянная определяется из условия равенства числа частиц с разными проекциями спина полному числу частиц N :

$$N = N_{+1} + N_0 + N_{-1} = n_0 \left[\exp \frac{\mu_0 B}{kT} + \exp \left(-\frac{\mu_0 B}{kT} \right) + 1 \right].$$

Средний магнитный момент в магнитном поле равен

$$M = \mu_0 N \frac{2 \operatorname{sh} \left(\frac{\mu_0 B}{kT} \right)}{1 + 2 \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_0 B}{kT} \right)}.$$

Отсюда при $\mu_0 B/kT \ll 1$ в силу того, что при $x \ll 1$, $\operatorname{sh} x \approx x$, $\operatorname{ch} x \approx 1$, находим

$$M = \frac{2}{3} \frac{N \mu_0^2 B}{kT}.$$

К главе 36. Ферромагнетизм

36.1. Токи, связанные с намагниченностью ($\mathbf{j}_{\text{маг}} = \nabla \times \mathbf{M}$), отличны от нуля только на поверхности шара. Именно эти токи создают магнитное поле вне и внутри шара. Из симметрии задачи ясно, что токи текут по окружностям, плоскости которых перпендикулярны $\mathbf{M}$. Проведем ось z через центр шара параллельно вектору $\mathbf{M}$. Представим себе, что изменение $\mathbf{M}$ на поверхности происходит не скачком, а непрерывно в некотором слое толщиной d , и вычислим j в этом слое:

$$(\mathbf{j}_{\text{маг}})_x = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad (\mathbf{j}_{\text{маг}})_y = -\frac{\partial M}{\partial x}.$$

Так как ось y направлена по касательной к поверхности шара, то $\partial M/\partial y = 0$. Кроме того, $\Delta x = d/\sin \theta$. Следовательно,

$$\frac{\partial M}{\partial x} = -\frac{M \sin \theta}{d} \quad \text{и} \quad j_{\text{маг}} = \frac{M \sin \theta}{d}.$$

Плотность поверхностных токов равна

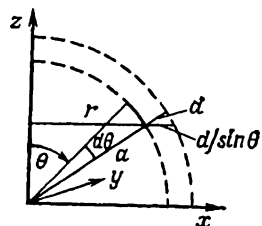
$$(\mathbf{j}_{\text{маг}})_y = j_{\text{маг}} d = M \sin \theta.$$

Это соотношение можно также записать в виде $\mathbf{j} = \mathbf{M} \times \mathbf{n}$, где $\mathbf{n}$ — нормаль к поверхности шара.

Вычисляя магнитный момент поверхностных токов, находим

$$m = \int \pi r^2(\theta) j dS = 2\pi a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^3 \theta d\theta = \frac{4\pi}{3} a^3 M.$$

Решение данной задачи можно также найти, воспользовавшись решением задачи 14.6 и заменив в нем вектор $\mathbf{e}_0 V \boldsymbol{\omega}$ на вектор $\mathbf{M}$.



36.2. Из теоремы Стокса (в качестве контура выберем среднюю линию магнита) следует

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{NI}{\epsilon_0 c^2},$$

где N — полное число витков обмотки; I — сила тока в обмотке. Разделяя контурный интеграл на две части, одна из которых отвечает зазору, а другая — контуру вне его, и предполагая, что поле H по всему периметру средней линии яра однородно, после интегрирования находим

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = \frac{NI}{e_0 c^2},$$

где H_1 — поле в зазоре; H_2 — поле в каркасе магнита; $l_1 = 1$ см — ширина зазора; $l = 375$ см — периметр средней линии. Граничные условия в зазоре имеют вид $B_{1n} = B_{2n}$, причем $B_{1n} = H_1$. Выражая H_1 через B_{2n} , находим уравнение

$$B_{2n} = \frac{NI}{e_0 c^2 l_1} - \frac{l_2}{l_1} H_2,$$

которое является уравнением прямой. Построив эту прямую на графике $B_{2n} = f(H_2)$ (см. стр. 59), можно найти H_2 и B_{2n} . Тогда поле в зазоре $H_1 = B_{2n}$ (для указанных параметров магнита эта линейная зависимость имеет вид $B_{2n} = 1,35$ вебер/м² — $375H_2$). Из графика определяем $H_1 = B_{2n} = 1,17$ вебер/м².

- 36.3. Обозначим через B_1 и B_2 напряженности магнитного поля в постоянном магните и зазоре. Поскольку зазор узок, то, пренебрегая краевыми эффектами в зазоре и на углах, напишем условие постоянства магнитного потока:

$$B_1 A_1 = B_2 A_2.$$

Здесь $A_1 = 100$ см² — площадь поперечного сечения магнита; $A_2 = 20$ см² — площадь зазора. Отсюда $B_2 = 5B_1$. После выключения тока циркуляция магнитной индукции H по средней линии системы будет равна нулю. Считая поле магнитной индукции однородным и учитывая, что магнитная восприимчивость мягкого железа бесконечна, т. е. в мягком железе $H = 0$, запишем

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 = 0,$$

где $l_1 = 20$ см — длина постоянного магнита, а $l_2 = 1$ см — ширина зазора. Так как в зазоре $H_2 = B_2 = 5B_1$, из последнего уравнения находим

$$4H_1 + B_1 = 0,$$

или, учитывая, что $H_1 = B_1 - M/e_0 c^2$,

$$\frac{M}{e_0 c^2} = -5H_1.$$

Если эту прямую линию построить на рисунке, приведенном в условии задачи, рядом с уже построенной кривой $M-H$ (стр. 60), то она пересечет эту кривую в двух точках, отвечающих $H_1 = \pm 0,04$ вебер/м². При уменьшении тока система окажется на верхней части кривой $M-H$, и, следовательно, $H_1 = -0,04$ вебер/м². Тогда $B_1 = -4H_1 = 0,16$ вебер/м² и искомая напряженность магнитного поля равна $B_2 = 5B_1 = 0,8$ вебер/м².

- 36.4. Магнитное поле такого стержня создается токами намагничивания, текущими по его поверхности (см. § 1 гл. 36 «Лекций», вып. 7). При этом поверхностная плотность токов $i_{\text{маг}} = M$. Величина B находится

так же, как для соленоида:

$$B = \frac{i}{e_0 c^2} = \frac{M}{e_0 c^2}.$$

Направление поля $\mathbf{H}$ совпадает с направлением вектора $\mathbf{B}$. Так как $H = B - M/e_0 c^2$, то внутри стержня $H = 0$.

Если вырезать игольчатую полость вдоль оси цилиндра, то поле внутри этой полости будет создаваться как уже рассмотренными токами, текущими по поверхности цилиндра, так и токами, текущими по поверхности полости. Плотность этих токов равна M , а направление их противоположно направлению внешних токов (в одном случае величина M увеличивается при удалении от оси цилиндра, в другом — уменьшается, поэтому направление вектора $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{M}$ различно). Таким образом, поле внутри полости — это поле, которое на своей оси создают два коаксиальных соленоида с противоположно направленными и равными по величине токами. Поле это равно нулю.

К главе 38. Упругость

- 38.1. Воспользуемся формулой (38.42) «Лекций» (вып. 7, стр. 204) для отклонения конца стержня длиной L , жестко заделанного другим концом в стенку:

$$x(L) = \frac{FL^3}{3YI};$$

здесь Y — модуль Юнга, I — момент инерции сечения стержня. По определению жесткость равна отношению $F/x(L) = 3YI/L^3$. Поскольку по условию задачи алюминиевый и стальной стержни обладают одинаковой жесткостью и имеют одну и ту же длину, можно написать $Y_{Al}/I_{Al} = Y_{сталь}/I_{сталь}$. Момент инерции круглого сечения стержня определяется выражением $I = \pi R^4/4$, где R — радиус поперечного сечения. Следовательно, считая, что $Y_{сталь} = 21 \cdot 10^{11}$ дин/см², $Y_{Al} = 7 \cdot 10^{11}$ дин/см², находим

а) $R_{Al}/R_{сталь} = (Y_{сталь}/Y_{Al})^{1/4} = 1,32$.

б) Если ρ — плотность вещества, то ($\rho_{Al} = 2,7$ г/см³, $\rho_{сталь} = 7,8$ г/см³)

$$\frac{m_{Al}}{m_{сталь}} = \frac{\rho_{Al} R_{Al}^2}{\rho_{сталь} R_{сталь}^2} = \frac{\rho_{Al}}{\rho_{сталь}} \sqrt{\frac{Y_{сталь}}{Y_{Al}}} \approx 0,6.$$

- 38.2. На тело массой m действуют две силы: вес тела P и упругая сила F со стороны стержня, действующая в вертикальном направлении. Уравнение движения этого тела имеет вид

$$m\ddot{y} = P + F.$$

Спроецируем это уравнение на вертикальную ось (ось y): $m\ddot{y} = F_y - P$. Используя формулу для отклонения конца стержня, жестко заделанного в стенку, находим силу, с которой незакрепленный конец стержня действует на тело m :

$$F_y = -\frac{3YI}{L^3} y;$$

здесь y — вертикальное смещение массы m ; Y — модуль Юнга; $I = \pi a^4/12$ — главный момент инерции сечения стержня. Подставляя

выражение для силы F_y в уравнение движения, получаем

$$m\ddot{y} = -P - \frac{3YI}{L^3} y.$$

Отсюда находим собственную частоту колебания массы m :

$$\omega = \left(\frac{3YI}{L^3 m} \right)^{1/2} = \frac{a^2}{2} \left(\frac{Y}{L^3 m} \right)^{1/2}.$$

- 38.3. Рассмотрим массивное тело, поперечные размеры которого много больше длины волны звука. Ударяя по такому телу, можно обнаружить, что оно не раздается во все стороны, а сжимается в направлении удара. В теле побегит продольная волна, в которой частицы тела движутся только в направлении распространения волны. Чтобы найти уравнения, описывающие распространение такого продольного звука, мы фактически можем рассмотреть стержень, который закреплен так, что при сжатии и растяжении его боковые размеры не сокращаются. Пусть площадь поперечного сечения стержня равна A , а длина L . Рассмотрим элемент стержня длиной Δz , расположенный на расстоянии z от его конца. Обозначим через $u(z, t)$ смещение этого элемента в волне в момент времени t . При статическом растяжении или сжатии внутреннее напряжение F/A на всем протяжении стержня одно и то же и пропорционально u/L , где u — удлинение стержня. В упругой волне важна местная деформация в точке z , т. е. $\partial u(z, t)/\partial z$. Для стержня без бокового смещения (см. «Лекции», вып. 7, стр. 195) получена формула

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{Y} \frac{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}{(1 - \sigma)} \frac{F(z)}{A},$$

где $F(z)$ — сила, действующая в поперечном сечении на расстоянии z от начала координат. На одном конце элемента Δz действует сила $F(z)$, а на другом $F(z + \Delta z)$. Полная сила, действующая на элемент Δz , очевидно, равна

$$F(z + \Delta z) - F(z) = \frac{dF(z)}{dz} \Delta z = \Delta z \cdot A \cdot \frac{(1 - \sigma)Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

Согласно закону Ньютона, эта сила равна произведению массы элемента $\rho \Delta z \cdot A$ (ρ — плотность тела) на его ускорение $\partial^2 u(z, t)/\partial t^2$:

$$\rho \Delta z \cdot A \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} = \Delta z \cdot A \frac{(1 - \sigma)Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2}.$$

Сокращая обе части этого равенства на $\Delta z \cdot A$, получаем уравнение

$$\frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial t^2} - v_{\text{прод}}^2 \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = 0,$$

где

$$v_{\text{прод}}^2 = \frac{(1 - \sigma)Y}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)\rho}$$

— квадрат фазовой скорости распространения продольных волн в твердом теле.

- 38.4. Так как расстояние между планками слабо отличается от L , то изгиб можно считать слабым. Кроме того, как будет ясно из дальнейшего, учет веса линейки массой около 0,3 г несущественно меняет величину действующей вдоль стержня силы внутренних напряжений. Обозна-

чим отклонение линейки от прямой линии между концами через $y(x)$, где x — расстояние от левого конца линейки, а горизонтальную составляющую силы, с которой упоры изгибают линейку, через F . Тогда форму изогнутой линейки можно описать уравнением (38.45) «Лекций» (вып. 7, стр. 205):

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{F}{YI} y.$$

где Y — модуль Юнга; I — момент инерции поперечного сечения линейки. Из этого уравнения следует:

а) Форма изогнутой линейки описывается синусоидой:

$$y(x) = K \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Постоянную K можно определить из условия нормировки на длину линейки:

$$\begin{aligned} L = \int_0^l \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} &= \int_0^l \sqrt{1 + y'^2} dx = \\ &= \int_0^l \sqrt{1 + K^2 \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l}} dx. \end{aligned}$$

Учитывая тот факт, что прогиб линейки слабый, т. е. что $K/l \ll 1$, вычисляем следующий интеграл:

$$L = \int_0^l \left(1 + \frac{K^2 \pi^2}{2l^2} \cos^2 \frac{\pi x}{l} \right) dx = l + \frac{K^2 \pi^2}{4l}$$

(при интегрировании мы разложили подынтегральное выражение в ряд). Отсюда $K = (2/\pi) \sqrt{(L-l)I} = 34,2 \text{ мм}$.

б) Сила, с которой линейка упирается в планки, $F = \pi^2 Y I / l^2$; здесь $I = ab^3/12$. Если принять для стали $Y = 2 \cdot 10^{12} \text{ дин/см}^2$, то $F = 1,47 \text{ кг}$.

38.5. Выберем плоскость изгиба в качестве плоскости xy . Ось x параллельна силе P . Пусть θ — угол между касательной к линии стержня и осью x , а s — расстояние вдоль кривой. Тогда $dx/ds = \cos \theta$ и $dy/ds = \sin \theta$. При этом кривизна стержня $1/R$ определяется выражением $1/R = d\theta/ds$. С другой стороны, кривизну стержня можно связать с изгибающим моментом силы P :

$$\frac{1}{R} = \frac{P}{YI} (\delta - y).$$

Следовательно,

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{P}{YI} (\delta - y).$$

Дифференцируя последнее уравнение по s , получаем исходное уравнение

$$IY \frac{d^2 \theta}{ds^2} + P \sin \theta = 0.$$

Так как угол θ мал, то полагая $\sin \theta \approx \theta$, получаем уравнение

$$\frac{d^2\theta}{ds^2} + \frac{P}{IY} \theta = 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$\theta(s) = A \sin \sqrt{\frac{P}{IY}} s + B \cos \sqrt{\frac{P}{IY}} s,$$

где A и B — константы. Из граничного условия $\theta(0) = 0$ (нижний конец стержня жестко заделан) имеем $B = 0$. Из условия равенства нулю момента сил внутренних напряжений у свободного конца, т. е. из граничного условия $\theta'(L) = 0$, находим

$$\cos \sqrt{\frac{P}{IY}} L = 0,$$

т. е.

$$\sqrt{\frac{P}{IY}} L = \frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, $P = \pi^2 IY / 4L^2$. Учитывая, что $I = \omega l^3 / 12$, окончательно находим искомую силу

$$P = \frac{\pi^2 IY \omega l^3}{48 L^2}.$$

К главе 40. Течение «сухой» воды

40.1. а) Как показано в гл. 31 «Лекций» (вып. 7), в произвольной точке жидкости i -я компонента силы, действующей на единичную площадку, перпендикулярную оси j , определяется тензором внутренних напряжений S_{ij} . Поскольку в невязкой жидкости нет сдвиговых напряжений, то недиагональные элементы тензора S_{ij} должны быть равны нулю. В этом можно убедиться, построив в данной точке три единичные площадки, перпендикулярные осям x , y и z соответственно. Таким образом, если около этой точки построить элементарную площадку da с вектором нормали $\mathbf{n}$, то сила, действующая на такую площадку, имеет следующие компоненты:

$$dF_x = S_{xx} n_x da,$$

$$dF_y = S_{yy} n_y da,$$

$$dF_z = S_{zz} n_z da.$$

Поскольку проекция силы dF на площадку da должна быть равна нулю (отсутствуют касательные напряжения), вектор dF должен быть направлен вдоль $\mathbf{n}$. Это может быть только при условии, что диагональные элементы тензора S_{ij} равны друг другу, т. е. если $S_{xx} = S_{yy} = S_{zz} = p$. Отсюда

$$dF = p n da.$$

Следовательно, какое бы направление вектора $\mathbf{n}$ мы ни выбрали, всегда сила, действующая на единичную площадку, перпендикулярную этому направлению, нормальна к площадке и равна численно одному и тому же значению p (давление).

- б) Это тождество следует как частный случай из последнего соотношения, доказанного в решении задачи 27.1:

$$\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}),$$

если положить в нем $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{v}$.

- 40.2. Направим ось z вдоль цилиндра, а начало координат выберем в наименьшей точке воронки. Введем вектор угловой скорости вращения жидкости ω , который, очевидно, направлен вдоль оси z . Тогда вектор скорости частицы жидкости, находящейся на расстоянии r от оси, можно записать в виде $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор частицы. При этом $v_x = -\omega y$, $v_y = \omega x$, $v_z = 0$. Вычислим вектор $\Omega = \nabla \times \mathbf{v}$. Находим

$$\Omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = 0,$$

$$\Omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0,$$

$$\Omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2\omega,$$

или в векторной форме: $\Omega = 2\omega$. Отсюда видно, что в данной задаче $\Omega \times \mathbf{v} = -2\omega^2 \mathbf{r}$. Радиус-вектор можно представить в виде $\mathbf{r} = \nabla(r^2/2)$. Тогда для любой точки жидкости выполняется уравнение

$$\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} + \varphi - \omega^2 r^2 = \text{const.}$$

Так как на поверхности жидкости давление постоянно и равно атмосферному, то имеем ($\varphi = gz$)

$$\frac{v^2}{2} - gz = \frac{\omega^2}{2} (x^2 + y^2) - gz = \text{const.}$$

Очевидно, в нашей системе координат $\text{const} = 0$. Поэтому уравнение поверхности жидкости имеет вид

$$z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2),$$

т. е. поверхность является параболоидом вращения.

- 40.3. В § 5 гл. 12 «Лекций» (вып. 5) решалась задача об обтекании шара «сухой» водой. Скорость сухой воды была найдена равной

$$\mathbf{v} = \nabla v_0 \cos \theta \left(r + \frac{a^3}{2r^2} \right) = v_0 \nabla z \left(1 + \frac{a^3}{2r^3} \right),$$

где v_0 — скорость воды на бесконечно большом расстоянии от шара, θ — угол между радиусом-вектором $\mathbf{r}$ и вектором скорости $\mathbf{v}_0$ (ось z выбрана вдоль вектора $\mathbf{v}_0$). В настоящей задаче мы можем воспользоваться этим решением, если перейдем к системе координат, в которой жидкость вдали от шара покоится. Результат можно записать в виде

$$\mathbf{v} = \frac{a^3}{2r^5} [3\mathbf{r} (\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{r}) - v_0 r^2].$$

Кинетическая энергия жидкости $T_{\text{ж}}$ равна интегралу от квадрата этой скорости, умноженному на плотность жидкости по всему пространству вне шара. Математически, как мы видим, задача аналогична

задаче 27.2, где определялась энергия магнитного поля Земли. Воспользовавшись найденным в этой задаче результатом, получим

$$T_{\text{ж}} = M \frac{v_0^2}{4}$$

(M — масса жидкости в объеме шара). Добавляя к $T_{\text{ж}}$ кинетическую энергию шара, находим полную энергию

$$T = \frac{1}{2} \left(m + \frac{M}{2} \right) v_0^2$$

Полный импульс системы вычисляется по формуле

$$\mathbf{P} = m\mathbf{v}_0 + \rho \int \mathbf{v} dV.$$

Подставляя в нее приведенное выше поле скоростей $\mathbf{v}$ и выполняя несложное интегрирование, получаем $\int \rho \mathbf{v} dV = 0$; следовательно, $\mathbf{P} = m\mathbf{v}_0$.

К главе 41. Течение «мокрой» воды

- 41.1. К параметрам, определяющим силу сопротивления, относятся: a — радиус шара, v — скорость движения шара относительно жидкости, η — коэффициент вязкости. Размерность этих величин такова:

$$[a] = \text{Длина}; \quad [v] = \text{Длина/Время};$$

$$[\eta] = \text{Масса/Время} \times \text{Длина}.$$

Будем искать из соображений размерности выражение для силы в виде $F = a^\alpha v^\beta \eta^\gamma$. Запишем условие совпадения размерностей левой и правой частей этого соотношения:

$$[F] = [a^\alpha v^\beta \eta^\gamma],$$

$$[\text{Масса}] \times [\text{Длина}] \times [\text{Время}]^{-2} =$$

$$= [\text{Масса}]^\gamma \times [\text{Длина}]^{\alpha+\beta-\gamma} \times [\text{Время}]^{-\beta-\gamma}.$$

Отсюда $\gamma = 1$, $\alpha + \beta - \gamma = 1$, $\beta + \gamma = 2$, или $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1$. В результате находим

$$F \sim \eta a v.$$

То, что параметры входят в выражение для F так, как было найдено выше, а не иначе, ясно из следующих качественных соображений. В «Лекциях» (вып. 7, стр. 258) указывалось, что вязкая сила $f_{\text{вязк}}$, действующая на единицу объема жидкости, пропорциональна коэффициенту вязкости η и вторым производным скорости по координатам. В задаче о движении шара в вязкой жидкости характерным размером, на котором существенно меняется скорость, являются размеры порядка размеров шара. Поэтому вторые производные по порядку величины равны v/a^2 . Умножая $f_{\text{вязк}}$ на объем порядка a^3 , находим $F \sim \eta a v$. Заметим, что сила трения, действующая на гармонический осциллятор, также пропорциональна скорости осциллятора.

- 41.2. Направим ось z вдоль оси трубы в направлении потока жидкости. Предполагая жидкость несжимаемой, напишем уравнение движения в стационарном случае:

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v}.$$

Так как в данной задаче отлична от нуля лишь z -компонента скорости — v_z , причем v_z зависит только от r — расстояния от оси трубы, то $(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = 0$. Записав $\nabla p = -\Delta p/L$, где $\Delta p = p_1 - p_2$ — разность давлений на концах трубы, получим

$$\nabla^2 v_z = -\frac{\Delta p}{\eta L}.$$

Это уравнение совпадает по виду с уравнением Пуассона для потенциала равномерно заряженного бесконечного цилиндра: $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$. Потенциал φ можно вычислить, если воспользоваться теоремой Гаусса, найти напряженность электрического поля, а затем проинтегрировать соотношение $\mathbf{E} = -\nabla \varphi$. В результате получаем $\varphi = \varphi_0 - \rho r^2/4\epsilon_0$, где φ_0 — постоянная интегрирования. Заменяя φ на v_z и ρ/ϵ_0 на $\Delta p/\eta L$, имеем

$$v_z(r) = v_0 - \frac{\Delta p}{4L\eta} r^2.$$

Из условия, что на стенке трубы скорость жидкости равна нулю, находим неизвестную константу v_0 . Таким образом,

$$v_z(r) = \frac{\Delta p}{4L\eta} (a^2 - r^2).$$

Поток массы жидкости плотностью ρ через поперечное сечение (расход) трубки равен

$$Q = \rho \int v_z(r) 2\pi r dr = \frac{a^4 \pi}{8\eta} \rho \frac{\Delta p}{L}.$$

Если провести аналогию между разностью потенциалов и разностью давлений, а также расходом жидкости и электрическим током, то под сопротивлением трубы надо понимать величину

$$R = \frac{\Delta p}{Q} = \frac{8\eta L}{\pi a^4 \rho}.$$

Аналогом конденсатора являются два сообщающихся сосуда, снизу соединенные трубкой, которую можно перекрывать краном так, что уровень воды в сосудах может быть разным.

- 41.3. а) Найдем сначала распределение скоростей в жидкости вдали от краев доски. Для этого выберем систему координат, плоскость xz которой совпадает с дном бассейна, а ось z направлена вдоль скорости доски. Тогда из уравнения Навье — Стокса для стационарного течения следует $d^2 v/dy^2 = 0$. Из этого уравнения находим $v = C_1 y + C_2$. Учитывая граничные условия $v(0) = 0$ и $v(d) = u$, определяем постоянные интегрирования C_1 и C_2 . Окончательно:

$$v = \frac{u}{d} y.$$

- б) Силу трения, действующую на единицу поверхности доски, найдем, исходя из формулы $S_{xz} = \eta(dv/dy) = \eta u/d$, где η — коэффициент вязкости. При этом работа на преодоление силы трения, совершаемая в единицу времени и отнесенная к единице площади поверхности доски, равна

$$S_{xz}u = \frac{\eta u^2}{d}.$$

Искомая же скорость диссипации энергии в единице объема оказывается равной

$$\frac{S_{xz}u}{d^2} = \frac{\eta u^2}{d^3}.$$

К главе 1. Амплитуды вероятности

- 1.1. Вероятность того, что частица достигнет экрана в точке x , если открыта щель 1, равна

$$P_1 = |\langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle|^2,$$

если открыта щель 2, то

$$P_2 = |\langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle|^2,$$

а при обеих открытых щелях

$$P_{12} = |\langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle|^2.$$

Учитывая симметричное расположение щелей относительно источника и предполагая, что источник испускает частицы изотропно, можно записать

$$\langle 1 | s \rangle = \langle 2 | s \rangle = c.$$

Считая щели бесконечно узкими, можно воспользоваться формулой (1.7) «Лекций» (вып. 8, стр. 14). Тогда с точностью до несущественного численного множителя имеем

$$\langle x | 1 \rangle = \frac{e^{ikl_1}}{l_1}, \quad \langle x | 2 \rangle = \frac{e^{ikl_2}}{l_2};$$

здесь l_1 и l_2 — расстояния от щелей 1 и 2 до точки x , а $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число. Таким образом,

$$P_1 = \frac{|c|^2}{l_1^2}, \quad P_2 = \frac{|c|^2}{l_2^2}, \quad P_{12} = |c|^2 \left| \frac{e^{ikl_1}}{l_1} + \frac{e^{ikl_2}}{l_2} \right|^2.$$

Обозначим расстояние от щели до экрана через l , тогда

$$l_1 = \left[l^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2}, \quad l_2 = \left[l^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2 \right]^{1/2}.$$

Задача нахождения максимума P_{12} как функции x приводит к transcendентному уравнению, получающемуся из условия $dP_{12}(x)/dx = 0$. Для простоты будем предполагать $l \gg a$, $l \gg x$. При этом величины l_1 и l_2 в знаменателе P_{12} можно принять равными друг другу:

$$l_1 \approx l_2 \approx l,$$

тогда как в фазовых множителях необходимо учитывать разность хода лучей

$$l_2 - l_1 = \sqrt{l^2 + \left(x + \frac{a}{2} \right)^2} - \sqrt{l^2 + \left(x - \frac{a}{2} \right)^2} \approx \frac{ax}{l}.$$

Внося в выражении для P_{12} первую экспоненту за скобки, получаем

$$P_{12} = \frac{|c|^2}{l^2} \left| 1 + e^{ikax/l} \right|^2.$$

Это выражение нетрудно преобразовать к виду

$$P_{12} = \frac{2|c|^2}{l^2} \left(1 + \cos \frac{kax}{l} \right).$$

Очевидно, P_{12} принимает максимальные значения при условии

$$\frac{kax_n}{l} = 2\pi n, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Пусть расстояние между центральным ($n = 0$) и первым боковым ($n = 1$) максимумами равно b , тогда

$$\lambda \approx ab/l \approx 0,25 \text{ см.}$$

В рассматриваемом приближении величины P_1 и P_2 одинаковы и не зависят от x . Однако в действительности, поскольку ширина щели является конечной и l_1 и l_2 зависят от x , эти величины плавно зависят от x . При этом положение максимумов и минимумов P_{12} будет определяться практически прежним условием. Если фазы двух волн совпадают (максимум), то

$$P_{12} = (\sqrt{P_1} + \sqrt{P_2})^2,$$

а если они отличаются на π (минимум),

$$P_{12} = (\sqrt{P_1} - \sqrt{P_2})^2.$$

Для центрального максимума из фиг. 1.1 «Лекций» (вып. 8, стр. 11) находим: $P_1 = P_2 = 0,5$, $P_{12} = 1,9$ (в относительных единицах). Расчет дает

$$P_{12} = (\sqrt{0,5} + \sqrt{0,5})^2 = 2,0.$$

Из этой же фигуры для первого бокового максимума имеем $P_1 = 0,3$, $P_2 = 0,65$, $P_{12} = 1,3$, тогда как расчетное значение $P_{12} = 1,8$. Для первого минимума $P_1 = 0,4$, $P_2 = 0,6$, $P_{12} = 0,1$ и

$$P_{12 \text{ расч}} = 0,02.$$

Для второго минимума $P_1 = 0,2$, $P_2 = 0,63$, $P_{12} = 0,1$ и

$$P_{12 \text{ расч}} = 0,15.$$

- 1.2. а) Если источник сдвинуть вверх на расстояние D , то разность фаз двух лучей, приходящих в точку x , очевидно, составит $\Delta\varphi = k(L_2 - L_1 + l_2 - l_1)$, где

$$L_1 = \sqrt{L^2 + (D - a/2)^2} \quad \text{и} \quad L_2 = \sqrt{L^2 + (D + a/2)^2}$$

— расстояния от источника до щелей 1 и 2 соответственно; L — расстояние от источника до преграды, в которой прорезаны щели. Величины l_1 , l_2 , a и k те же, что в предыдущей задаче. Принимая $a \ll L$ и $x \ll l$, получаем $\Delta\varphi \approx (ka/l)(x + Dl/L)$. Таким образом, разность фаз для точки x в рассматриваемом случае совпадает с разностью фаз для точки $x' = x + Dl/L$ в случае, когда источник

расположен на осевой линии. Следовательно, вся интерференционная картина сместится вниз на расстояние Dl/L по сравнению с рассмотренной в предыдущей задаче.

- б) Из решения предыдущей задачи мы получили, что расстояние между двумя соседними максимумами определяется формулой

$$b = \lambda l/a \quad (a \ll l, b \ll l).$$

Следовательно, если увеличить вдвое расстояние a между щелями, то расстояние между максимумами уменьшится вдвое. Вся интерференционная картина «сожмется» по оси x в масштабе 1:2.

- в) Поскольку ширина щели считается бесконечно малой (т. е. разность хода лучей, прошедших через разные точки щели, равна нулю), то изменение ширины щели l вдвое приведет лишь к увеличению вдвое амплитуды волны, прошедшей через щель l , т. е.

$$\langle 1 | s \rangle = 2 \langle 2 | s \rangle = 2c.$$

Следовательно,

$$\langle x | s \rangle = \langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle = c \left(2 \frac{e^{ikl_1}}{l_1} + \frac{e^{ikl_2}}{l_2} \right).$$

В тех же приближениях, что и раньше, получаем

$$P_{12} = \frac{|c|^2}{l^2} \left(5 + 4 \cos \frac{kax}{l} \right).$$

Сравнивая это выражение с результатом задачи 1.1, убеждаемся, что при увеличении ширины одной из щелей вдвое максимумы интенсивности увеличатся в $9/4$ раза, в минимумах же интенсивность не обращается в нуль, а составляет $1/4$ интенсивности в максимумах, найденных в задаче 1.1. Положение минимумов и максимумов не изменяется.

- 1.3. Интенсивность прошедшего света будет в $1/\cos^2 \theta$ раз слабее, чем падающего. Отдельный фотон может либо пройти, либо не пройти через поляризатор. Вероятность прохождения фотона, поляризованного в вертикальной плоскости, равна $\cos^2 \theta$, причем прошедший фотон поляризуется вдоль оси «пропускания».

- 1.4. Электроны, проходя через кристалл, испытывают дифракцию так же, как, например, рентгеновские лучи. Дифракция рентгеновских лучей на кристаллической решетке обсуждалась в гл. 38 «Лекций» (вып. 3). Там отмечалось, что для рассмотрения такой дифракции удобно ввести представление об интерференции лучей, отраженных от системы параллельных атомных плоскостей. При этом условие максимума записывается в виде

$$n\lambda = 2d \sin \theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

где d — расстояние между соседними атомными плоскостями; λ — длина волны; 2θ — угол между падающим лучом и направлением на дифракционный максимум. В кристалле можно выделить много систем таких плоскостей, характеризующихся различными значениями d . Отметим, что для решетки золота (кубической гранецентрированной) максимальное значение d равно постоянной кристаллической решетки $a = 2,88 \cdot 10^{-10}$ м, следующее за ним равно $a/\sqrt{2}$ и т. п.

Рассмотрим теперь, к чему приведет хаотическая ориентация отдельных кристаллов в поликристаллической фольге. Если $\lambda < 2d$, то среди кристалликов фольги обязательно найдутся такие, для которых условие максимума выполнено. Далее, поскольку кристаллики

имеют всевозможные ориентации, то дифракционная картина должна быть симметричной относительно направления пучка. Поэтому на фотопластинке области почернения будут иметь форму концентрических колец с центром на оси пучка и радиусом

$$R_n = L \operatorname{tg} 2\theta \approx n\lambda L/d;$$

здесь L — расстояние от фольги до фотопластинки. Первому кольцу соответствует $n = 1$ и максимальное значение d . Вычислим теперь радиусы первых колец. Длина волны электрона с кинетической энергией W равна

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p} = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mW}} \approx 9 \cdot 10^{-10} \text{ см},$$

отсюда радиус первого кольца

$$R_1 = \frac{\lambda L}{a} = \frac{2\pi\hbar L}{a\sqrt{2mW}} \approx 0,3 \text{ см}.$$

Второму кольцу соответствует $n = 1$ и $d = a/\sqrt{2}$, так что

$$R_2 = R_1 \sqrt{2} \approx 0,4 \text{ см}.$$

При вычислении следующих радиусов нужно учитывать, что новые максимумы соответствуют не только новым значениям d , но и значениям $n > 1$.

- 1.5. Пусть l_1 и l_2 — расстояния от щелей 1 и 2 до точки x на экране. Суммарная амплитуда появления электрона в точке x записывается в виде

$$A(x) = a_1 \frac{e^{ikl_1}}{l_1} + a_2 \frac{e^{ikl_2}}{l_2}.$$

Величины l_1 и l_2 выражаются через l , a и x так же, как в задаче 1.1. При малых a ($a \ll l$) и x ($x \ll l$) имеем

$$A(x) \approx \frac{1}{l} (a_1 e^{-ikxa/2l} + a_2 e^{ikxa/2l}) e^{ikl}.$$

Введем фазы и абсолютные значения амплитуд:

$$a_1 = |a_1| e^{i\delta_1}, \quad a_2 = |a_2| e^{i\delta_2};$$

тогда

$$|A(x)|^2 = \frac{1}{l^2} \left[|a_1|^2 + |a_2|^2 + 2|a_1||a_2| \cos \left(kx \frac{a}{l} + \delta_2 - \delta_1 \right) \right].$$

- 1.6. а) Амплитуду попадания частицы в точку x запишем в виде

$$A(x) = c \left(\frac{e^{ikL_1}}{L_1} + \frac{e^{ikL_2}}{L_2} \right),$$

где $k = 2\pi/\lambda = p_0/\hbar$ — волновое число; $L_1 = [L^2 + (x - d/2)^2]^{1/2}$ и $L_2 = [L^2 + (x + d/2)^2]^{1/2}$ — расстояния от щелей 1 и 2 до точки x . При $L \gg d$ и $L \gg x$ имеем

$$|A(x)|^2 = \frac{4|c|^2}{L^2} \cos^2 \left(\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{2} \right);$$

здесь $\varphi_2 - \varphi_1 = kxd/L$. Для первого бокового максимума $\varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi$, $x = a$. Таким образом, $a = 2\pi\hbar L/p_0 d$,

- б) Если при внешнем воздействии фазы первого и второго лучей изменяются соответственно на $\delta\varphi_1$ и $\delta\varphi_2$, то

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{kxd}{L} + \delta\varphi_2 - \delta\varphi_1.$$

Центральный максимум располагается в точке $x_0 = S$, для которой $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$. Следовательно,

$$S = (\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2) \frac{\hbar L}{p_0 d}.$$

- в) Из закона сохранения энергии

$$\frac{p^2(x)}{2m} + V(x) = \frac{p^2(0)}{2m} + V(0)$$

находим

$$p(x) = p(0) \sqrt{1 + \frac{2m}{p^2(0)} [V(0) - V(x)]}.$$

Так как потенциальная энергия невелика, можно записать

$$p(x) \approx p(0) + \frac{m}{p(0)} [V(0) - V(x)].$$

Если $V(x)$ медленно меняется с расстоянием, то

$$V(x) \approx V(0) - Fx$$

и соответственно

$$p(x) = p(0) + \frac{Fx}{v}.$$

Здесь $F = -(dV/dx)_{x=0}$, $v = p(0)/m$ — начальная скорость частицы.

- г) Среднее изменение разности фаз двух лучей выразим через среднюю разность импульсов Δp :

$$\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2 = \frac{1}{\hbar} L \Delta p.$$

Поскольку среднее вертикальное расстояние между двумя путями равно $d/2$, то $\Delta p = Fd/2v$. Тем самым приведенное в условии задачи выражение для $\delta\varphi_1 - \delta\varphi_2$ доказано.

Используя результат, полученный в п. (б), находим значение сдвига интерференционной картины:

$$S = \frac{FLd}{2\hbar v} \frac{\hbar L}{p_0 d} = \frac{1}{2} a T^2.$$

Величины $a = F/m$ и $T = L/v$ совпадают с классическими значениями ускорения и времени пролета частицы. Таким образом, сдвиг интерференционной картины соответствует величине отклонения классической частицы под действием постоянной силы F за время $T = L/v$.

- 1.7. а) Поскольку источником испускаются только электроны со спином «вверх», амплитуда попадания электрона в точку x

$$\langle x | s \rangle = \langle x | 1 \rangle \alpha \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \alpha \langle 2 | s \rangle.$$

Следовательно,

$$P_+ = |\alpha|^2 [\langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle]^2,$$

т. е. картина распределения интенсивностей такая же, как и без учета спина, изменятся лишь абсолютные значения интенсивности.

- б) Если спины электронов, вылетающих из источника, направлены «вниз», имеем

$$P_- = |\beta|^2 |\langle x | 1 \rangle \langle 1 | s \rangle + \langle x | 2 \rangle \langle 2 | s \rangle|^2,$$

$$\frac{P_+}{P_-} = \frac{|\alpha|^2}{|\beta|^2} = \text{const.}$$

- в) Если направления спинов случайны, то вероятности иметь спин «вверх» и «вниз» одинаковы, так что

$$P_0(x) = \frac{1}{2} P_+(x) + \frac{1}{2} P_-(x)$$

и

$$\frac{P_+(x)}{P_0(x)} = \frac{2|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = \text{const.}$$

- 1.8. Пусть α — амплитуда прохождения первой щели; тогда амплитуда прохождения второй щели равна $0,1\alpha e^{i\varphi}$, где φ — произвольная фаза. В максимуме интенсивности полная амплитуда пропорциональна величине $(\alpha + 0,1\alpha)$ (фаза φ компенсируется разностью хода двух лучей), а в минимуме амплитуда пропорциональна $(\alpha - 0,1\alpha)$. Следовательно, отношение интенсивностей в максимуме и минимуме равно

$$\frac{|\alpha + 0,1\alpha|^2}{|\alpha - 0,1\alpha|^2} = \frac{1,21}{0,81} \approx 1,5.$$

- 1.9. Одновременное попадание фотонов в детекторы a и b может произойти несколькими способами:

1) фотон, испущенный источником A , попадает в детектор a , а фотон из источника B попадает в детектор b ;

2) фотон из источника B попадает в детектор a , а фотон из источника A попадает в детектор b ;

3) в оба детектора попадают фотоны из источника A (это не значит, конечно, что в детекторы a и b попадает один и тот же фотон — ведь имеется поток фотонов);

4) в оба детектора попадают фотоны из источника B .

Способы 1 и 2 неразличимы, так что соответствующие амплитуды должны складываться (при этом предполагается, что фотоны из источников A и B имеют одинаковые энергии). Но способы 3 и 4 в принципе можно отличать как один от другого, так и от первых двух способов. Поэтому здесь уже будут складываться не амплитуды, а только вероятности. Таким образом, можно записать

$$P_{12} = [|\langle a | A \rangle \langle b | B \rangle + \langle a | B \rangle \langle b | A \rangle|^2 + |\langle a | A \rangle \langle b | A \rangle|^2 + |\langle a | B \rangle \langle b | B \rangle|^2] N,$$

где N — число фотонов, испускаемых каждым источником в единицу времени. Подставляя сюда выражения для амплитуд

$$\langle a | A \rangle = \langle b | B \rangle = c e^{ikR_1},$$

$$\langle b | A \rangle = \langle a | B \rangle = c e^{ikR_2}$$

и выполняя необходимые преобразования, получаем

$$P_{12} = 2 |c|^4 [2 + \cos 2k(R_2 - R_1)] N.$$

Расстояния до источников

$$R_1 = [R^2 + (D - d)^2/4]^{1/2},$$

$$R_2 = [R^2 + (D + d)^2/4]^{1/2}.$$

При $R \gg D$ и $R \gg d$ имеем

$$R_2 - R_1 \approx \frac{Dd}{2R},$$

так что аргумент косинуса $2k(R_2 - R_1) = 2\pi Dd/R\lambda$. Ясно, что если изменять d (расстояние между детекторами), то скорость счета совпадений будет периодически меняться. Оценим порядок величины периода Δd .

Примем $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, $R = 10^{17}$ м (расстояние до ближних звезд), $D = 10^{11}$ м (диаметр звезды может быть сравним с расстоянием от Солнца до планет). Тогда $\Delta d = R\lambda/D = 0,5$ м, т. е. эту величину нетрудно измерить. Таким образом, «диаметр звезды» можно определить из соотношения

$$D = R\lambda/(d_2 - d_1),$$

где d_1 и d_2 — два ближайших значения d , для которых скорости счета совпадений одинаковы, например максимальны.

К главе 2. Тожественные частицы

2.1. а) Энергия кванта связана с частотой соотношением $\epsilon = h\nu$. Подставляя сюда

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{сек}, \quad \nu = 10^6 \text{ сек}^{-1},$$

получаем

$$\epsilon = 6,626 \cdot 10^{-28} \text{ Дж} = 4,14 \cdot 10^{-9} \text{ эв}.$$

б) Радиопередатчик мощностью 10^6 вт за каждый период колебаний $T = 10^{-6}$ сек излучает энергию $E = 10^3 \text{ квт} \cdot 10^{-6} \text{ сек} = 1 \text{ Дж}$. Следовательно, за период колебаний испускается

$$N = E/\epsilon \approx 1,509 \cdot 10^{27} \text{ квантов}.$$

2.2. Формула Планка для спектрального распределения энергии излучения абсолютно черного тела имеет вид

$$\frac{dE}{d\omega} = \frac{V\hbar}{\pi^2 c^3} \frac{\omega^3}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1};$$

здесь V — объем полости, k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура. Будем рассматривать величину

$$I(\omega) = \frac{dE}{d\omega} \frac{c}{V}.$$

а) При малых ω ($\hbar\omega \ll kT$)

$$I(\omega) = \frac{kT}{\pi^2 c^2} \omega^2 \quad (\text{формула Рэлея — Джинса}),$$

а при больших ω ($\hbar\omega \gg kT$)

$$I(\omega) = \frac{\hbar}{\pi^2 c^2} \omega^3 e^{-\hbar\omega/kT} \quad (\text{формула Вина}).$$

- б) Максимум спектра $I(\omega)$ определим, приравнявая нулю производную функции $f(x) = x^3/(e^x - 1)$, где $x = \hbar\omega/kT$. Это условие приводит к трансцендентному уравнению

$$x = 3(1 - e^{-x}).$$

Его удобно решать графически или методом итераций. В качестве первого приближения возьмем $x_1 = 3$. Каждое следующее приближение определяется соотношением

$$x_{n+1} = 3 - 3 \exp(-x_n).$$

С достаточной степенью точности получаем

$$x \approx 2,822.$$

Таким образом, максимум спектра $I(\omega)$ соответствует частоте

$$\omega_m \approx 2,822 \, kT/\hbar.$$

- в) Распределение энергии по длинам волн ($\lambda = 2\pi c/\omega$) можно получить, преобразуя формулу Планка следующим образом:

$$I(\lambda) = \frac{dE}{d\lambda} = \frac{dE}{d\omega} \left| \frac{d\omega}{d\lambda} \right| = \frac{16\pi^2 \hbar c^2 \lambda^{-5}}{\exp(2\pi \hbar c / \lambda kT) - 1}.$$

Максимум функции $f(x) = x^5/(e^x - 1)$, где $x = 2\pi \hbar c / \lambda kT$, определится трансцендентным уравнением

$$x = 5(1 - e^{-x}),$$

единственное решение которого $x \approx 4,965$.

Следовательно, максимум плотности распределения энергии по длинам волн соответствует значению

$$\lambda_m \approx \frac{2\pi \hbar c}{4,965 kT}.$$

- г) Полагая $\lambda_m = 5 \cdot 10^{-7} \, \text{м}$ и учитывая, что $\hbar = 1,054 \cdot 10^{-34} \, \text{дж} \cdot \text{сек}$, $c = 3 \cdot 10^8 \, \text{м/сек}$, $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \, \text{дж/град}$, получаем оценку для температуры на поверхности Солнца:

$$T = \frac{2\pi \hbar c}{4,965 k \lambda_m} \approx 0,58 \cdot 10^4 \, \text{град}.$$

- 2.3. Вследствие принципа Паули состояние атома гелия, в котором спины обоих электронов выстроены в одном направлении, отличается от основного состояния тем, что по крайней мере один из электронов находится на возбужденном уровне с энергией $\Delta E = \hbar\omega$, где ω — частота света, испускаемого при переходе электрона с верхнего уровня на нижний.

Если атом находится в постоянном магнитном поле B , то энергия основного состояния не меняется, т. к. спины электронов антипараллельны и суммарный магнитный момент равен нулю. В возбужденном состоянии, где спины электронов параллельны, их суммарный магнитный момент равен $+2\mu_e$, где

$$\mu_e = \frac{q_e \hbar}{2mc} = -0,927 \cdot 10^{-23} \, \text{а} \cdot \text{м}^2$$

— собственный магнитный момент электрона, q_e и m — его заряд и масса. При ориентации магнитных моментов обоих электронов про-

тив поля ($\mu_e < 0$) возникает «выигрыш» в энергии на величину $2\mu_e B$, так что полное изменение энергии возбужденного состояния атома гелия в магнитном поле по сравнению с основным состоянием составляет $(\Delta E + 2\mu_e B)$. Если эта величина отрицательна, то энергия одного из возбужденных состояний оказывается меньше, чем энергия основного состояния. Таким образом, при наложении магнитного поля, удовлетворяющего условию

$$B > \frac{\hbar\omega}{2|\mu_e|} = \frac{\pi\hbar c}{|\mu_e|\lambda},$$

спины обоих электронов можно выстроить в одном направлении (вдоль магнитного поля). Принимая $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м, получаем $B > < 2 \cdot 10^4$ вебср/м².

- 2.4. Если бы ядра состояли из протонов и электронов, то в ядре атома азота должно было бы быть 14 протонов и 7 электронов, поскольку заряд ядра азота равен $+7q_e$. Кроме того, в электронной оболочке атома должны быть еще 7 электронов. Следовательно, всего в атоме азота содержалось бы 28 фермионов. Суммарный собственный момент количества движения (спин) такой системы должен быть целым, поэтому атом азота в целом вел бы себя как бозон. Такое противоречие с экспериментом, известное в истории ядерной физики как «азотная катастрофа», легко снимается, если предположить существование электрически нейтральной ядерной частицы (нейтрона) с массой, близкой к массе протона, и с полужелым спином. Тогда ядра состоят из протонов и нейтронов, так что атом азота содержит 7 протонов и 7 нейтронов в ядре и 7 электронов в электронной оболочке. Спин такой системы будет полужелым, и атом азота, следовательно, должен быть ферми-частицей.

- 2.5. а) Амплитуды вероятности испускания фотона возбужденным атомом в присутствии n других точно таких же фотонов даются выражениями

$$\langle n+1, 0 | n, 1 \rangle = \sqrt{n+1} a,$$

$$\langle n+1, 1 | n, 2 \rangle = \sqrt{n+1} b,$$

а амплитуды перехода атома на более высокий уровень (амплитуды вероятности поглощения фотона) записываются в виде

$$\langle n-1, 1 | n, 0 \rangle = \sqrt{n} a^*,$$

$$\langle n-1, 2 | n, 1 \rangle = \sqrt{n} b^*,$$

где полужирными цифрами 0, 1, 2 обозначены номера атомных состояний до испускания или поглощения, после испускания и поглощения фотона. Наличие двух констант (a и b) связано с возможными различиями амплитуд переходов между разными парами уровней. При тепловом равновесии число атомов в каждом из состояний должно оставаться неизменным, так что скорости перехода в данное состояние и выхода из него должны быть одинаковы, т. е.

$$N_0 n |a|^2 = N_1 (n+1) |a|^2,$$

$$N_1 (n+1) |a|^2 + N_1 n |b|^2 = N_0 n |a|^2 + (n+1) |b|^2 N_2,$$

$$N_1 n |b|^2 = N_2 (n+1) |b|^2.$$

Из первого и третьего уравнений получаем

$$N_1/N_0 = N_2/N_1 = n/(n+1).$$

Второе уравнение при этом удовлетворяется тождественно. С другой стороны, из статистической механики известно, что $N(E)/N(E_0) = \exp[(E_0 - E)/kT]$. Подставляя сюда $E_0 = 0$, $E_1 = \Delta E$, $E_2 = 2\Delta E$, получаем

$$\frac{N_1}{N_0} = \frac{N_2}{N_1} = e^{-\Delta E/kT} = \frac{n}{n+1}.$$

б) Отсюда среднее число фотонов с частотой $\omega = \Delta E/\hbar$

$$\bar{n}(\omega) = 1/(e^{\hbar\omega/kT} - 1).$$

в) При малых частотах ($\hbar\omega \ll kT$) получим $\bar{n}(\omega) = kT/\hbar\omega \gg 1$. Таким образом, число низкочастотных фотонов велико. Энергия одного фотона равна $\hbar\omega$, поэтому полная энергия всех фотонов с данной частотой равна kT , что отвечает средней тепловой энергии классического гармонического осциллятора. При высоких частотах ($\hbar\omega \gg kT$) имеем

$$\bar{n}(\omega) = \exp(-\hbar\omega/kT),$$

т. е. число высокочастотных фотонов весьма мало. При этом энергия всех фотонов $\hbar\omega\bar{n}(\omega) \ll kT$.

2.6. Нейтрино является фермионом, поэтому, согласно принципу Паули, в одном и том же состоянии может находиться не более чем одна частица. Следовательно, нельзя получить поток нейтрино с высокой степенью когерентности: «нейтринный лазер» невозможно создать принципиально.

2.7. Обозначим амплитуду перехода первой частицы из a в b (в отсутствие другой частицы) через $\langle b|a \rangle$, а амплитуду перехода второй частицы из c в d — через $\langle d|c \rangle$. Тогда соответствующие вероятности $P_{ab} = |\langle b|a \rangle|^2$, $P_{cd} = |\langle d|c \rangle|^2$. Если частицы не взаимодействуют, то для нетождественных частиц амплитуда одновременного перехода первой частицы из a в b и второй частицы из c в d равна произведению амплитуд перехода каждой из частиц:

$$\langle bd|ac \rangle = \langle b|a \rangle \langle d|c \rangle,$$

а вероятность такого перехода

$$P(ac \rightarrow bd) = |\langle bd|ac \rangle|^2 = P_{ab}P_{cd}.$$

Если частицы тождественны, то рассмотренный переход невозможно отличить от одновременного перехода первой частицы из a в d и второй частицы из c в b . Тогда вероятность перехода $(a, c) \rightarrow (b, d)$ равна

$$|\langle b|a \rangle \langle d|c \rangle + \langle d|a \rangle \langle b|c \rangle|^2,$$

что отличается от простого произведения вероятностей P_{ab} и P_{cd} .

2.8. Система двух дейтронов может находиться в девяти различных спинных состояниях (3 состояния дейтрона-мишени $\times$ 3 состояния падающего дейтрона). Если дейтроны в мишени и в падающем пучке неполяризованы, то вероятность каждого из таких состояний равна $1/9$. В случае, когда оба дейтрона имеют одинаковые проекции спинов, то вероятность рассеяния равна

$$|f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2,$$

а поскольку возможны три таких состояния, то вклад в полную вероятность рассеяния от состояний с одинаковыми проекциями спинов равен

$$3 \cdot \frac{1}{9} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2.$$

Если же проекции спинов дейтронов различны, то случай рассеяния одного из дейтронов на угол θ и соответственно второго на угол $\pi - \theta$ в принципе можно отличить от случая рассеяния первого дейтрона на угол $\pi - \theta$, а второго на угол θ . Тогда должны складываться не амплитуды, а вероятности:

$$|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2.$$

У системы двух дейтронов может быть 6 различных состояний, в каждом из которых проекции спинов дейтронов не совпадают (три проекции спина дейтронов мишени, и для каждой из этих проекций две отличные от нее проекции спина дейтронов пучка). Поэтому вклад в полную вероятность рассеяния от таких состояний равен

$$\frac{1}{9} \cdot 6 (|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2).$$

Следовательно, полная вероятность

$$\begin{aligned} \sigma(\theta) &= \frac{1}{3} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 + \frac{2}{3} (|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2) = \\ &= |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 + \frac{2}{3} \operatorname{Re} [f^*(\theta) f(\pi - \theta)]. \end{aligned}$$

- 2.9. а) Будем считать, что при достаточно большой отдаче (отвечающей большим углам рассеяния) протон или нейтрон, на котором произошло рассеяние, обязательно вылетает из ядра. Кроме того, не будем учитывать возможности вторичного рассеяния π -мезона и протона (нейтрона). Тогда случаи рассеяния π -мезона на каждом из протонов и нейтронов можно различить, так что полная вероятность рассеяния на угол θ получается суммированием вероятностей рассеяния на каждой из частиц ядра:

$$P_a(\theta) = 2P_1 + 2P_2.$$

где

$$P_1 = |f_1(\theta)|^2, \quad P_2 = |f_2(\theta)|^2.$$

- б) Если отдача настолько слаба (т. е. угол рассеяния достаточно мал), что ядро после рассеяния остается со 100%-ной вероятностью «неповрежденным», то невозможно определить, на какой из частиц ядра произошло рассеяние. В этом случае складываются амплитуды, так что вероятность рассеяния π -мезона на ядре гелия равна

$$P_b(\theta) = |f_1(\theta) + f_1(\theta) + f_2(\theta) + f_2(\theta)|^2 = 4 |f_1(\theta) + f_2(\theta)|^2.$$

Представим амплитуды рассеяния π -мезона на протоне и нейтроне в виде

$$f_1(\theta) = \sqrt{P_1} e^{i\varphi_1}, \quad f_2(\theta) = \sqrt{P_2} e^{i\varphi_2}.$$

Тогда

$$P_b(\theta) = 4 [P_1 + P_2 + 2 \sqrt{P_1 P_2} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Для сравнения величин P_a и P_b будем считать, помимо сделанных выше предположений, что разность фаз $\varphi_1 - \varphi_2$ близка к нулю.

(Эксперименты по рассеянию мезонов подтверждают это для определенной области энергий мезонов и углов рассеяния.) Тогда, очевидно, P_b значительно больше, чем P_a , если только величины P_1 и P_2 не слишком сильно меняются при переходе от малых θ (при которых рассматривается P_b) к большим (таким, чтобы отдача была велика).

Интересно отметить, что если $f_1 \approx f_2$, то вероятность неупругого рассеяния P_a пропорциональна числу частиц в ядре, тогда как вероятность упругого рассеяния P_b пропорциональна квадрату числа частиц в ядре (эффект когерентности).

2.10. а) Вероятность регистрации нейтрона детектором равна

$$|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 = |f - f|^2 = 0.$$

- б) В этом случае спин нейтрона, попавшего в счетчик, может быть направлен как вверх, так и вниз. Нейтрон со спином «вверх» может оказаться в счетчике двумя способами: либо нейтрон пучка рассеется на угол θ без поворота спина, либо он рассеется на угол $\pi - \theta$ с «переворотом» спина (в счетчик при этом попадет нейтрон отдачи). Эти два способа неразличимы, поэтому вероятность попадания в счетчик нейтрона со спином «вверх» равна

$$|f(\theta) + g(\pi - \theta)|^2 = |f + g|^2.$$

Аналогично, если регистрируемый нейтрон имеет спин, направленный вниз, получаем

$$|g(\theta) + f(\pi - \theta)|^2 = |f + g|^2.$$

Таким образом, полная вероятность регистрации равна $2|f + g|^2$.

- в) В этом случае равновероятны два начальных состояния:

- 1) нейтроны пучка и мишени поляризованы вдоль оси $+z$;
- 2) у нейтронов пучка спин направлен вниз, а у нейтронов мишени — вверх.

В первом из этих состояний вероятность рассеяния равна нулю [см. п. (а)], а во втором $2|f + g|^2$, в полной аналогии с п. (б). Поэтому полная вероятность равна $|f + g|^2$.

- г) Имеется четыре возможных начальных состояния: два с параллельными спинами (оба «вверх» или оба «вниз», причем вероятность рассеяния здесь равна нулю) и два с антипараллельными спинами. Вероятность рассеяния в состоянии с антипараллельными спинами равна $2|f + g|^2$. Учитывая, что вероятность иметь любое из начальных состояний равна $1/4$, получаем полную вероятность регистрации нейтрона

$$2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 2|f + g|^2 = |f + g|^2.$$

- д) Хотя в данном случае детектор одинаково реагирует на протоны и нейтроны, в принципе их можно различить. Поэтому вероятность регистрации рассеянной частицы под углом θ равна

$$|f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 = 2|f|^2.$$

2.11. а) Из законов сохранения энергии и импульса следует, что в системе ц. м. абсолютные значения импульсов обоих протонов до и после столкновения равны между собой:

$$p_1 = p_2 = p'_1 = p'_2 = p.$$

Скорость системы ц. м. относительно лаб. системы координат равна скорости протона мишени в системе ц. м.: $V = p/m$ и совпадает

по направлению с импульсом p_1 . Импульс рассеянного протона в лаб. системе координат равен

$$p'_{1L} = p'_1 + mV.$$

Отсюда

$$p'_{1L} \cos \alpha = p'_1 \cos \theta + mV,$$

$$p'_{1L} \sin \alpha = p'_1 \sin \theta.$$

Учитывая, что $p'_1 = mV = p$, получаем

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \operatorname{tg} \frac{\theta}{2}.$$

Таким образом, $\alpha = \theta/2$.

- б) В детекторе может появиться протон со спином «вниз» либо в результате рассеяния первого протона на угол θ с «переворотом» спина, либо в результате рассеяния без «переворота» спина на угол $\pi - \theta$, так что будет зарегистрирован второй протон. Общая амплитуда вероятности в этом случае равна

$$f'(\pi - \theta) + g(\theta).$$

- в) Возможны 4 комбинации направлений спинов налетающих протонов и протонов мишени. Две из них соответствуют параллельным, а две — антипараллельным спинам. В каждом из последних двух случаев имеется по два конечных состояния:

1) направление спина регистрируемого протона совпадает с первоначальным [амплитуда $f'(\theta) + g(\pi - \theta)$];

2) спин регистрируемого протона «перевернут» по отношению к спину падающего протона [амплитуда $f'(\pi - \theta) + g(\theta)$].

Полная вероятность регистрации протона в направлении θ равна сумме вероятностей каждого из указанных процессов, взятых с весом $1/4$. В результате получаем

$$P = \frac{1}{2} [|f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + |f'(\theta) + g(\pi - \theta)|^2 + |f'(\pi - \theta) + g(\theta)|^2].$$

- г) Если $f'(\theta) = f(\theta)$ и $g(\theta) = 0$, то из предыдущей формулы получим

$$P = |f(\theta)|^2 + |f(\pi - \theta)|^2 - \operatorname{Re} [f^*(\theta) f(\pi - \theta)].$$

Это выражение можно записать в виде

$$P = \frac{3}{4} |f(\theta) - f(\pi - \theta)|^2 + \frac{1}{4} |f(\theta) + f(\pi - \theta)|^2.$$

Таким образом, $A = 3/4$, $B = 1/4$. Первое слагаемое в этой формуле соответствует рассеянию протонов в состоянии с суммарным спином 1, а второе слагаемое — рассеянию в состоянии с суммарным спином 0.

- 2.12. Согласно принципу Паули, в каждом квантовом состоянии может находиться не более одного электрона. Следовательно, энергия системы принимает наименьшее возможное значение, если электроны заполняют все состояния с энергиями от наименьшей ($\epsilon_{\min} = 0$) до наибольшей энергии $\epsilon_{\max} = p_{\max}^2/2m$, величина которой определяется числом электронов в объеме V . Число квантовых состояний (мод)

поступательного движения электрона с волновым числом $k = p/\hbar$ в интервале от k до $k + dk$ равно $V \cdot 4\pi k^2 dk / (2\pi)^3$. Умножая эту величину на 2 (две возможные проекции спина электрона) и интегрируя по импульсам электронов от 0 до $p_{\text{макс}}$, получаем полное число N электронов в объеме V в состоянии с наименьшей возможной энергией:

$$N = \int_0^{p_{\text{макс}}} V \cdot 2 \cdot 4\pi \frac{p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V p_{\text{макс}}^3}{3\pi^2 \hbar^3},$$

откуда находим

$$p_{\text{макс}} = (3\pi^2 N/V)^{1/3} \hbar.$$

Полная энергия U складывается из энергий электронов, находящихся в различных квантовых состояниях:

$$U = \int_0^{p_{\text{макс}}} \frac{p^2}{2m} \cdot V \cdot 2 \cdot \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} = \frac{V p_{\text{макс}}^5}{10\pi^2 \hbar^3 m}.$$

Подставляя сюда значения $p_{\text{макс}}$, находим энергию газа

$$U = \frac{3}{10} (3\pi^2)^{1/3} \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{m} N.$$

Давление этого «вырожденного электронного газа» легко найти, если воспользоваться соотношением

$$P = - \frac{\partial U}{\partial V}.$$

Получаем

$$P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{5} \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \frac{\hbar^2}{m};$$

следовательно, давление и объем связаны соотношением

$$PV^\gamma = \text{const}, \text{ где } \gamma = 5/3.$$

- 2.13. Подставляя в формулу для давления (см. решение предыдущей задачи) значение $N/V = \rho/2M_p$, получаем

$$P = \frac{(3\pi^2)^{1/3}}{5} \frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{\rho}{2M_p} \right)^{1/3},$$

или

$$P = A \rho^{1/3},$$

где

$$A = \frac{1}{10} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{1/3} \frac{1}{M_p^{1/3}} \frac{\hbar^2}{m}.$$

Отсюда видно, в частности, что вклад в давление от частиц данного сорта обратно пропорционален их массе, поэтому можно считать, что все давление создается «вырожденным электронным газом», так как масса ядра много больше массы электрона.

Второе из уравнений, приведенных в условии задачи, можно получить, рассматривая условие равновесия элемента массы под действием сил гравитации и давления. На элемент вещества звезды, занимающий единичный объем и находящийся на расстоянии r от центра звезды, действует гравитационная сила $G\rho M(r)/r^2$ [$M(r)$ — масса, заключенная внутри сферы радиусом r] и сила давления, равная $-dP/dr$. Из условия равновесия этих сил получаем

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\rho M(r)}{r^2}.$$

Третье уравнение

$$\frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho$$

означает просто, что объем шарового слоя радиусом r и толщиной dr равен $dV = 4\pi r^2 dr$, а его масса, следовательно, равна $dM = 4\pi r^2 \rho dr$.

К главе 3. Спин единицы

- 3.1. Воспользуемся имеющейся в «Лекциях» подсказкой: представим, что между A и B расположен прибор T , в котором открыты все три «пути». Наличие этого прибора ничего не меняет, но позволяет говорить, что частица, входя в прибор A в состоянии ϕ , попадает в прибор B в одном из трех возможных состояний $+T$, $0T$ или $-T$.

Амплитуда того, что частица, войдя в прибор A в состоянии ϕ , выйдет из него в состоянии k ($k = +T, 0T, -T$), в этом же состоянии войдет в прибор B и выйдет из него в состоянии χ , равна

$$\langle \chi | B | k \rangle \langle k | A | \phi \rangle.$$

а полная амплитуда равна сумме таких амплитуд:

$$\langle \chi | C | \phi \rangle = \sum_k \langle \chi | B | k \rangle \langle k | A | \phi \rangle.$$

- 3.2. Распределение пучка по трем состояниям ($J = +S, 0S, -S$) после прохождения системы STS определяется амплитудами

$$\langle JS | STS | \phi \rangle = \sum_{i, k} \langle JS | kT \rangle \langle kT | iS \rangle \langle iS | \phi \rangle.$$

где ϕ — произвольное начальное состояние, а J — любое из трех конечных состояний.

Если в приборе T открыта лишь одна щель, то относительное распределение в конечном состоянии не зависит от того, с какой амплитудой ($\langle iS | \phi \rangle$) представлено каждое из состояний в начальном пучке. Действительно, в этом случае из суммы по k остается один член

$$\langle JS | STS | \phi \rangle = \langle JS | kT \rangle \sum_i \langle kT | iS \rangle \langle iS | \phi \rangle,$$

так что отношение вероятностей найти частицу в состояниях J и J' не зависит от $\langle iS | \phi \rangle$:

$$\frac{W_J}{W_{J'}} = \frac{|\langle JS | STS | \phi \rangle|^2}{|\langle J'S | STS | \phi \rangle|^2} = \frac{|\langle JS | kT \rangle|^2}{|\langle J'S | kT \rangle|^2}.$$

Если же в приборе T открыты две или три щели, то отношение вероятностей зависит от начального состояния, причем в последнем

случае распределения по состояниям на входе в прибор и на выходе из него совпадают, $W_j = |\langle jS|\varphi\rangle|^2$.

- 3.3. а) Вычислим сначала амплитуды $\langle iT|TS|\varphi\rangle = \langle iT|+S\rangle\langle +S|\varphi\rangle$, где φ — начальное состояние. По условию задачи $|\langle +S|\varphi\rangle|^2 = N_1/N$ (N — интенсивность пучка частиц, входящих в первый прибор S). Поскольку в приборе T открыты щели $0T$ и $-T$, то iT может принимать значения $0T$ и $-T$. Амплитуды $\langle iT|+S\rangle$ найдем по формулам (3.38) «Лекций» (вып. 8, стр. 80) при $\alpha = \pi/2$:

$$\langle 0T|+S\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \langle -T|+S\rangle = \frac{1}{2}.$$

Таким образом,

$$N_2 = N \sum_{iT=0T, -T} |\langle iT|+S\rangle\langle +S|\varphi\rangle|^2 = \frac{3}{4} N_1.$$

- б) Интенсивность N_3 пучка, прошедшего через последний прибор S , определяется квадратом модуля амплитуды

$$\langle -S|STS|\varphi\rangle = \sum_{iT=0T, -T} \langle -S|iT\rangle\langle iT|+S\rangle\langle +S|\varphi\rangle.$$

Величины $\langle -S|iT\rangle$ можно найти, воспользовавшись той же формулой (3.38) «Лекций» и соотношением $\langle jS|iT\rangle = \langle iT|jS\rangle^*$:

$$\langle -S|0T\rangle = 1/\sqrt{2}, \quad \langle -S|-T\rangle = 1/2.$$

Окончательно находим

$$N_3 = |\langle -S|STS|\varphi\rangle|^2 = N_1/16.$$

- в) Если все щели в приборе T открыты, то он фактически не влияет на прохождение частиц. В этом случае, очевидно, $N_2 = N_1$, $N_3 = 0$.

- 3.4. Найдем прежде всего амплитуды $\langle jT|iS\rangle$. Прибор T повернут относительно S на угол $\pi/2$ вокруг оси x . Этот поворот можно осуществить тремя последовательными поворотами: на угол $-\pi/2$ вокруг оси z , затем на угол $\pi/2$ вокруг новой оси y' и, наконец, на угол $\pi/2$ вокруг новой оси z'' . Следовательно, можно написать, что

$$\langle jT|iS\rangle = \sum_{k,l} \langle jT|T''k\rangle\langle kT''|T'l\rangle\langle lT'|iS\rangle;$$

здесь T' и T'' относятся к промежуточным системам координат. Величины, входящие в правую часть этой формулы, можно определить по формулам (3.38) и (3.39) «Лекций» (вып. 8, стр. 80). Выполняя соответствующие выкладки (их удобно делать в матричной форме), найдем матрицу амплитуд $\langle jT|iS\rangle$:

$jT \backslash iS$	$+S$	$0S$	$-S$
$+T$	$1/2$	$i/\sqrt{2}$	$-1/2$
$0T$	$i/\sqrt{2}$	0	$i/\sqrt{2}$
$-T$	$-1/2$	$i/\sqrt{2}$	$1/2$

- а) Число частиц, выходящих из S' в состоянии $|jS'\rangle$, определяется квадратом модуля амплитуды

$$\langle jS' | S'TS | \Phi \rangle = \sum_{k=\pm T} \langle jS' | kT \rangle \langle kT | OS \rangle \langle OS | \Phi \rangle.$$

Функции преобразования $\langle kT | OS \rangle$ имеются в таблице, приведенной выше, и из этой таблицы можно получить также $\langle jS' | kT \rangle$, учитывая, что

$$\langle jS' | kT \rangle = \langle kT | jS' \rangle^*$$

и что приборы S и S' ориентированы одинаково. Следовательно,

$$\langle kT | jS' \rangle = \langle kT | jS \rangle.$$

Выбирая нормировку $|\langle OS | \Phi \rangle|^2 = N_0$, находим величины $N_{jS'} = N_0 \left| \sum_{kT=\pm T} \langle jS' | kT \rangle \langle kT | OS \rangle \right|^2$:

$$N_{0S'} = N_0, \quad N_{+S'} = N_{-S'} = 0.$$

- б) Если в приборе T установлены «прозрачные детекторы», регистрирующие прохождение частиц в состояниях $+T$ и $-T$, то число частиц, выходящих из прибора S' в состоянии jS' , будет равно сумме чисел частиц в этом состоянии, находившихся в промежуточных состояниях $+T$ и $-T$, поскольку регистрация промежуточных состояний устраняет интерференцию соответствующих амплитуд. (Чтобы лучше это понять, полезно вспомнить § 2 гл. II «Лекций», вып. 8.) Таким образом,

$$N_{jS'} = |\langle jS' | +T \rangle \langle +T | OS \rangle \langle OS | \Phi \rangle|^2 + |\langle jS' | -T \rangle \langle -T | OS \rangle \langle OS | \Phi \rangle|^2,$$

так что

$$N_{+S'} = N_{-S'} = N_0/4, \quad N_{0S'} = N_0/2.$$

Значения N_{kT} определяются выражением

$$N_{kT} = |\langle kT | OS \rangle \langle OS | \Phi \rangle|^2,$$

из которого получим

$$N_{+T} = N_{-T} = N_0/2, \quad N_{0T} = 0.$$

- в) Если числа отсчетов N_{+T} , N_{-T} не регистрируются (но сами «прозрачные детекторы» срабатывают), то это, естественно, не влияет на значения $N_{\pm S'}$, $N_{0S'}$.
- г) Если половина частиц, пролетающих через детекторы в приборе T , не взаимодействует с ними, то полное число частиц в состоянии jS' равно полусумме числа частиц, которые были бы при 100%-ной эффективности счетчиков и в случае, когда счетчики отсутствуют. Тогда

$$N_{+S'} = N_0/8, \quad N_{0S'} = \frac{3}{4} N_0, \quad N_{-S'} = N_0/8.$$

- д) Рассмотрим теперь случай, когда все перегородки из прибора S и счетчики из прибора T удалены и в прибор S поступает N_0 частиц в единицу времени. Тогда наличие прибора S никак не влияет на результат. Если падающий пучок не поляризован, то можно считать, что в прибор T поступает по $N_0/3$ частиц в состояниях $+T$, $0T$ и $-T$, причем между соответствующими амплитудами ин-

терференция отсутствует. Учитывая, что пучок частиц в состоянии $0T$ блокирован, находим

$$N_{jS'} = \frac{N_0}{3} \sum_{k=\pm 1} |\langle jS' | kT \rangle|^2.$$

Отсюда, используя таблицу $\langle kT | jS \rangle$, получаем

$$N_{+S'} = N_{-S'} = N_0/6, \quad N_{0S'} = N_0/3.$$

К главе 4. Спин одна вторая

4.1. Амплитуду вероятности появления атома в точке Q можно записать в виде суммы произведений

$$\langle Q | P \rangle = \sum_{iS} \sum_{iT} \langle Q | iT \rangle \langle iT | iS \rangle \langle iS | P \rangle.$$

Здесь $\langle iS | P \rangle$ — амплитуда вероятности иметь на выходе первого прибора частицу в состоянии iS . Поскольку пучок атомов неполяризован и прибор пропускает лишь атомы в состоянии $+S$, то

$$|\langle iS | P \rangle|^2 = \frac{1}{2} N \delta_{iS, +S}.$$

Далее, второй прибор пропускает только атомы, находящиеся в состоянии $+T$, поэтому $\langle Q | iT \rangle = \delta_{iT, +T}$. Таким образом, число атомов, попадающих в точку Q , равно

$$N_Q = |\langle Q | P \rangle|^2 = \frac{N}{2} |\langle +T | +S \rangle|^2.$$

Величина $\langle +T | +S \rangle$ представляет собой амплитуду вероятности того, что частица со спином «вверх» в системе координат S , характеризующей первый прибор, будет иметь спин «вверх» в системе координат T , связанной со вторым прибором. Положение повернутой системы координат будем характеризовать углами Эйлера. Тогда, согласно табл. 4.1 (см. «Лекции», вып. 8, стр. 105), имеем

$$\langle +T | +S \rangle = \cos \frac{\alpha}{2} e^{i(\beta+\gamma)/2}.$$

При этом величина N_Q не зависит от углов β и γ :

$$N_Q = \frac{1}{2} N \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Угол α — это угол между осями z и z' в исходной (S) и повернутой (T) системах координат. Теперь рассмотрение частных случаев не представляет труда:

а) $\alpha = 0$, $N_Q = N/2$; б) $\alpha = \pi/2$, $N_Q = N/4$;

в) $\alpha = \pi/2$, $N_Q = N/4$; г) $\alpha = \pi/2$, $N_Q = N/4$;

д) $\alpha = \pi/4$, $N_Q = \frac{N}{2} \cos^2 \frac{\pi}{8} = \frac{N}{4} \left(1 + \cos \frac{\pi}{4}\right) = \frac{N}{4} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$;

е) $\alpha = \pi/2$, $N_Q = N/4$; ж) $\alpha = \pi/2$, $N_Q = N/4$;

з) $\alpha = 0$, $N = N/2$.

4.2. Пусть прибор регистрирует частицы в том случае, если они находятся в некотором состоянии спина φ . Тогда амплитуда вероятности зарегистрировать частицу в состоянии ψ равна

$$\langle \varphi | \psi \rangle = \langle \varphi | +z \rangle \langle +z | \psi \rangle + \langle \varphi | -z \rangle \langle -z | \psi \rangle.$$

Обозначая $\langle +z | \psi \rangle$ и $\langle -z | \psi \rangle$ (амплитуды вероятностей иметь в состоянии ψ направление спина «вверх» и «вниз») соответственно через a и b , а $\langle \varphi | +z \rangle$ и $\langle \varphi | -z \rangle$ — через X и Y (амплитуды вероятности регистрации частицы, имеющей направление спина «вверх» и «вниз» соответственно), получаем

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = |aX + bY|^2.$$

1) Если спин частицы направлен вверх (или, что то же самое, вдоль оси $+z$), то $|a| = 1$, $b = 0$ и, следовательно,

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = |X|^2.$$

Аналогично, если спин направлен вниз, то

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = |Y|^2.$$

2) Если спин направлен по оси, характеризуемой полярными углами θ и φ , то, согласно формуле (4.36) (вып. 8, стр. 106),

$$a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2}, \quad b = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi/2}.$$

Следовательно,

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \left| \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2} X + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi/2} Y \right|^2.$$

3) Если спин направлен вдоль оси $+x$ ($\theta = \pi/2$, $\varphi = 0$), то

$$a = b = 1/\sqrt{2}$$

и

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} |X + Y|^2$$

Если же спин направлен вдоль $-x$ ($\theta = \pi/2$, $\varphi = \pi$), то

$$a = -i/\sqrt{2}, \quad b = i/\sqrt{2}$$

и

$$|\langle \varphi | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2} |X - Y|^2.$$

4) Пусть теперь частицы неполяризованы, причем «случайность» ориентации спина определяется разными способами. Вероятность зарегистрировать частицу, если направление ее спина выбирается способом (а), равна

$$P_a = \frac{1}{2} |X|^2 + \frac{1}{2} |Y|^2 = \frac{1}{2} (|X|^2 + |Y|^2).$$

Для способа (б) имеем

$$P_b = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |X + Y|^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |X - Y|^2 = \frac{1}{2} (|X|^2 + |Y|^2).$$

Наконец, для способа (в) получим

$$\begin{aligned}
 P_v &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \left| X \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\varphi/2} + Y \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\varphi/2} \right|^2 \sin\theta d\theta = \\
 &= \frac{1}{4\pi} \left\{ |X|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta d\theta + |Y|^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta d\theta + \right. \\
 &\quad \left. + 2\operatorname{Re} \left[X^* Y \int_0^{2\pi} e^{i\varphi} d\varphi \int_0^\pi \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\theta d\theta \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Замечая, что в последнем выражении в первых двух слагаемых интегрирование по φ и θ дает 2π , а интеграл по φ в последнем члене равен нулю, получаем

$$P_v = \frac{1}{2} (|X|^2 + |Y|^2).$$

Таким образом, для всех трех способов вероятность обнаружить частицу одна и та же. Не существует метода, которым можно было бы отличить один способ случайной ориентации спина от другого.

- 4.3. Выходящая из прибора S частица находится в состоянии $-S$. Амплитуда вероятности прохождения этой частицы через приборы T и U равна

$$\sum_T \langle +U | T \rangle \langle T | -S \rangle.$$

Соответственно

$$N = N_0 \left| \sum_T \langle +U | T \rangle \langle T | -S \rangle \right|^2.$$

Величины $\langle +U | T \rangle$ и $\langle T | -S \rangle$ определяются относительной ориентацией приборов U и T , T и S .

Рассмотрим случай, соответствующий фиг. 2.

- а) Прибор T повернут относительно прибора S на угол $\varphi = \pi$ вокруг оси y . Из табл. 4.2 (см. вып. 8, стр. 105) для $R_y(\varphi)$ получаем

$$\langle +T | -S \rangle = 1, \quad \langle -T | -S \rangle = 0.$$

- б) Перейдем от системы S к системе T , используя только повороты вокруг осей y и z . Можно, например, сначала повернуть систему S вокруг оси y на угол $\varphi_1 = \pi/2$, затем новую систему S' повернуть на угол $\varphi_2 = \theta$ вокруг оси z' , а полученную таким путем систему S'' повернуть на угол $\varphi_3 = -\pi/2$ вокруг оси y'' . Соответственно

$$\langle +U | -S \rangle = \sum_{k,l} \langle +U | kS'' \rangle \langle kS'' | jS' \rangle \langle jS' | -S \rangle$$

Из табл. 4.2 «Лекций» для R_z и R_y получаем

$$\begin{aligned}
 \langle +S' | -S \rangle &= \langle -S' | -S \rangle = 1/\sqrt{2}, \\
 \langle -S'' | +S' \rangle &= \langle +S'' | -S' \rangle = 0, \\
 \langle +S'' | +S' \rangle &= \langle -S'' | -S' \rangle = e^{i\theta/2}, \\
 \langle +U | +S'' \rangle &= -\langle +U | -S'' \rangle = 1/\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\langle +U | -S \rangle = i \sin(\theta/2).$$

Точно такой же результат получается, если рассматривать переход от S к T как поворот вокруг оси x на угол θ .

- в) При $\theta = 0$ имеем $\langle +U | -S \rangle = 0$, а при $\theta = \pi$ $\langle +U | -S \rangle = i$. В последнем случае оси z систем S и U направлены в противоположные стороны, поэтому $|\langle +U | -S \rangle|^2 = 1$. По той же причине в случае (а) $|\langle +T | -S \rangle|^2 = 1$. Но системы T и U отличаются тем, что одна из них повернута относительно другой на угол π вокруг оси z . Следовательно, амплитуды $\langle +T | -S \rangle$ и $\langle +U | -S \rangle$ отличаются друг от друга фазовым множителем $e^{i\pi/2} = i$.

- 4.4. Пусть плоская монохроматическая электромагнитная волна распространяется вдоль оси z . Тогда в S -представлении (т. е. в системе координат S) вектор ее электрического поля имеет компоненты $E_x, E_y, 0$, а в T -представлении (т. е. в системе координат T , повернутой относительно S на угол θ вокруг оси z) тот же вектор имеет компоненты $E_{x'}, E_{y'}, 0$. Согласно закону преобразования вектора при поворотах системы координат,

$$E_{x'} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta,$$

$$E_{y'} = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.$$

Следовательно,

$$\langle xT | xS \rangle = \cos \theta, \quad \langle xT | yS \rangle = \sin \theta,$$

$$\langle yT | xS \rangle = -\sin \theta, \quad \langle yT | yS \rangle = \cos \theta.$$

- 4.5. Пусть $E = (E_x, E_y, 0)$ — вектор напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны на входе в прибор, а $E' = (E'_x, E'_y, 0)$ — соответствующий вектор на выходе из прибора. С помощью матрицы $\langle j|A|i \rangle$ мы можем выразить компоненты вектора на выходе прибора через компоненты вектора на входе:

$$E'_x = \langle x|A|x \rangle E_x + \langle x|A|y \rangle E_y,$$

$$E'_y = \langle y|A|x \rangle E_x + \langle y|A|y \rangle E_y.$$

С другой стороны, используя классические представления о поляризации света, можно найти соотношения между E' и E и тем самым получить элементы матрицы $\langle j|A|i \rangle$.

- а) В силу того, что луч y блокируется, $E'_y = 0$, тогда как $E'_x = E_x$. Следовательно, единственный отличный от нуля элемент матрицы $\langle x|A|x \rangle = 1$.

- б) В системе координат x', y' , повернутой вместе с прибором относительно системы x, y , компоненты вектора E записываются в виде

$$E_{x'} = E_x \cos \theta + E_y \sin \theta,$$

$$E_{y'} = -E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.$$

После прохождения через прибор $E'_{x'} = E_{x'}$, $E'_{y'} = 0$. Возвращаясь в исходную систему координат, получаем

$$E'_x = E'_{x'} \cos \theta = E_x \cos^2 \theta + E_y \sin \theta \cos \theta,$$

$$E'_y = E'_{y'} \sin \theta = E_x \sin \theta \cos \theta + E_y \sin^2 \theta.$$

Таким образом,

$$\langle x | A | x \rangle = \cos^2 \theta, \quad \langle y | A | y \rangle = \sin^2 \theta,$$

$$\langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = \sin \theta \cos \theta.$$

- в) На выходе прибора $E'_x = E_x$, $E'_y = 0$, так, что матрица $\langle j | A | i \rangle$ оказывается такой же, как в случае «а».
- г) Поляризатор эквивалентен системе «анализатор — блокировка одного из лучей — синтезатор». Матрица $\langle j | A | i \rangle$ совпадает с полученной в случае (б).
- д) В этом случае

$$E'_x = E_x e^{i\varphi}, \quad E'_y = E_y.$$

Следовательно,

$$\langle x | A | x \rangle = e^{i\varphi}, \quad \langle y | A | y \rangle = 1,$$

$$\langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = 0.$$

- е) Аналогично предыдущему пункту имеем

$$\langle x | A | x \rangle = \langle y | A | y \rangle = e^{i\varphi},$$

$$\langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = 0.$$

Заметим, что одинаковое изменение фазы обеих компонент вектора не влияет на поляризацию.

- ж) В системе координат, повернутой вместе с прибором на угол 45° , вектор E имеет компоненты

$$E_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (E_x + E_y),$$

$$E_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (-E_x + E_y).$$

На выходе прибора $E'_{x'} = iE_x$, $E'_{y'} = E_y$.

Следовательно, в исходной системе координат компоненты вектора E' равны

$$E'_x = \frac{1}{\sqrt{2}} (E'_{x'} - E'_{y'}) = \frac{i+1}{2} E_x + \frac{i-1}{2} E_y,$$

$$E'_y = \frac{1}{\sqrt{2}} (E'_{x'} + E'_{y'}) = \frac{i-1}{2} E_x + \frac{i+1}{2} E_y.$$

Отсюда получаем

$$\langle x | A | x \rangle = \langle y | A | y \rangle = \frac{i+1}{2},$$

$$\langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = \frac{i-1}{2}.$$

- з) При прохождении через четвертьволновую пластинку разность фаз лучей x и y изменяется на $\pi/2$, и мы имеем (с точностью до общего фазового множителя)

$$E'_x = iE_x, \quad E'_y = E_y.$$

Таким образом,

$$\langle x | A | x \rangle = i, \quad \langle y | A | y \rangle = 1, \\ \langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = 0.$$

- и) При прохождении пластинки толщиной d монохроматическая волна с круговой частотой ω приобретает дополнительную фазу

$$kd = \omega d/v = \omega dn/c;$$

здесь k и v — волновое число и скорость света в среде, n — показатель преломления среды. В двоякопреломляющей среде показатель преломления различен для света с поляризациями вдоль осей x и y . При этом сдвиги фаз x - и y -лучей после прохождения ими пластинки толщиной d даются выражениями

$$\varphi_x = \frac{\omega d}{c} n_x, \quad \varphi_y = \frac{\omega d}{c} n_y.$$

Соответственно можно записать

$$E'_x = E_x e^{i\varphi_x}, \quad E'_y = E_y e^{i\varphi_y}.$$

Тогда

$$\langle x | A | x \rangle = e^{i\omega dn_x/c}, \quad \langle y | A | y \rangle = e^{i\omega dn_y/c}, \\ \langle x | A | y \rangle = \langle y | A | x \rangle = 0.$$

- к) После прохождения через раствор компоненты вектора E' в системе координат, повернутой на угол θ относительно исходной, очевидно, равны $E'_x = E_x$, $E'_y = E_y$. В исходной системе координат

$$E'_x = E_x \cos \theta - E_y \sin \theta, \\ E'_y = E_x \sin \theta + E_y \cos \theta.$$

Следовательно,

$$\langle x | A | x \rangle = \langle y | A | y \rangle = \cos \theta, \\ \langle y | A | x \rangle = -\langle x | A | y \rangle = \sin \theta.$$

- л) В этом случае на выходе прибора компонента E'_x равна нулю, тогда как $E'_y = E_y + E_x e^{i\alpha}$, где α — сдвиг фазы луча x при прохождении им через раствор сахара. Следовательно,

$$\langle x | A | x \rangle = \langle x | A | y \rangle = 0, \\ \langle y | A | y \rangle = 1, \quad \langle y | A | x \rangle = e^{i\alpha}.$$

- м) Средняя по времени интенсивность плоской монохроматической волны на входе прибора пропорциональна $(|E_x|^2 + |E_y|^2)$. На выходе прибора она пропорциональна величине

$$|E_y + E_x e^{i\alpha}|^2 = |E_x|^2 + |E_y|^2 + 2|E_x||E_y|\cos(\alpha + \beta),$$

где β — разность фаз комплексных величин E_x и E_y . Если $\cos(\alpha + \beta) > 0$, то интенсивность выходящей волны больше, чем входящей, что означает «бесплатное» увеличение энергии, т. е. возможность построения вечного двигателя.

Разумеется, этот вывод неверен. Дело в том, что в рассматриваемом приборе лучи x и y должны быть пространственно разделены и, стало быть, ограничены в пространстве (в плоскости, перпендикулярной направлению распространения). Но это означает, что волны нельзя считать плоскими. Тогда после соединения пучков возникает типичная интерференционная картина: усиление интенсивности в одном месте «экрана» сопровождается ослаблением в другом, так что полная интенсивность в пучке на выходе из прибора равна (или меньше при наличии поглощения) интенсивности пучка на входе прибора.

- 4.6. а) Пусть $f_{+z}(\theta)$ и $f_{-z}(\theta)$ — амплитуды вероятностей того, что электрон испускается со спином вдоль положительного направления оси z и противоположно оси z соответственно. Тогда мы можем написать

$$f_{+z}(\theta) = A \sqrt{1 - \frac{v}{c}} \sin \frac{\theta}{2}; \quad f_{-z}(\theta) = A \sqrt{1 + \frac{v}{c}} \cos \frac{\theta}{2}.$$

Следовательно, относительная вероятность испускания электрона со спином вдоль положительного направления оси z равна

$$w_{+z}(\theta) = \frac{|f_{+z}(\theta)|^2}{|f_{+z}(\theta)|^2 + |f_{-z}(\theta)|^2} = \frac{\left(1 - \frac{v}{c}\right) \sin^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta},$$

а со спином, направленным в противоположную сторону оси z ,

$$w_{-z}(\theta) = \frac{\left(1 + \frac{v}{c}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2}}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta}.$$

- б) Амплитуды вероятностей того, что спин направлен вдоль осей $+x$ или $-x$, можно записать в виде

$$\begin{aligned} f_{+x} &= \langle +x | +z \rangle f_{+z} + \langle +x | -z \rangle f_{-z}, \\ f_{-x} &= \langle -x | +z \rangle f_{+z} + \langle -x | -z \rangle f_{-z}. \end{aligned}$$

Здесь $\langle +x | +z \rangle$ — амплитуда вероятности того, что у электрона со спином вдоль оси $+z$ спин окажется направленным вдоль оси $+x$ и т. п.

Из табл. 4.2 «Лекций» (вып. 8, стр. 105) имеем

$$\begin{aligned} \langle +x | +z \rangle &= \langle +x | -z \rangle = \langle -x | -z \rangle = 1/\sqrt{2}, \\ \langle -x | +z \rangle &= -1/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} f_{+x} &= (f_{+z} + f_{-z})/\sqrt{2}, \\ f_{-x} &= (-f_{+z} + f_{-z})/\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Соответствующие вероятности равны

$$w_{+x}(\theta) = \frac{|f_{+x}|^2}{|f_{+x}|^2 + |f_{-x}|^2} = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} \right],$$

$$w_{-x}(\theta) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2} \sin \theta}{1 + \frac{v}{c} \cos \theta} \right].$$

в) Аналогично предыдущему имеем

$$f_{+y} = \langle +y | +z \rangle f_{+z} + \langle +y | -z \rangle f_{-z},$$

$$f_{-y} = \langle -y | +z \rangle f_{+z} + \langle -y | -z \rangle f_{-z},$$

где

$$\langle +y | +z \rangle = \langle -y | -z \rangle = 1/\sqrt{2},$$

$$\langle -y | +z \rangle = \langle +y | -z \rangle = -i/\sqrt{2}.$$

При вычислении этих амплитуд следует иметь в виду, что переход от оси z к оси y осуществляется поворотом вокруг оси x на угол $-\pi/2$.

Используя явный вид амплитуд f_{+z} и f_{-z} , находим

$$w_{+y}(\theta) = w_{-y}(\theta) = 1/2.$$

Результаты для осей x и y , отличающиеся друг от друга, получаются всегда в тех случаях, когда складываются амплитуды f_{+z} и f_{-z} , т. е. состояния со спином вдоль оси z и против оси z интерферируют.

г) Если антинейтрино не регистрируется, то абсолютные вероятности следует проинтегрировать по всем возможным направлениям вылета антинейтрино.

Из соображений симметрии ясно, что вероятность вылета электрона с тем или иным спином не зависит от полярного угла θ (от него зависят лишь фазы соответствующих амплитуд). Поэтому, воспользовавшись результатами, полученными в п. (а), для относительных вероятностей того или иного направления спина имеем

$$W_{\pm z} = \frac{\int |f_{\pm z}(\theta)|^2 d\Omega}{\int [|f_{+z}(\theta)|^2 + |f_{-z}(\theta)|^2] d\Omega}.$$

Вычисляя интегралы

$$\int \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\Omega = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta d\theta = 2\pi,$$

$$\int \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\Omega = 2\pi,$$

$$\int \left(1 + \frac{v}{c} \cos \theta\right) d\Omega = 4\pi,$$

получаем

$$W_{+z} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{v}{c} \right),$$

$$W_{-z} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{v}{c} \right).$$

К главе 5. Зависимость амплитуд от времени

5.1. В соответствии с формулой (5.33) «Лекций» (вып. 8, стр. 124) направление фронта волны, описывающей частицу массой M с импульсом p , при прохождении расстояния w в области неоднородного потенциала изменяется на угол

$$\delta\theta = -\frac{M}{p^2} \frac{\partial V}{\partial y} w.$$

Здесь мы приняли, что ось y совпадает с направлением градиента потенциала V , причем V изменяется медленно, а первоначальное направление движения частицы перпендикулярно оси y . Если частица имеет спин 1 и магнитный момент μ , то энергия ее взаимодействия с магнитным полем может принимать значения $-\mu B$, 0, $+\mu B$ соответственно для проекций спина $+1$, 0, -1 на направление магнитного поля. Следовательно, проходя через неоднородное магнитное поле, частица меняет направление своего движения, причем различным образом для состояний $+1$, 0, -1 , т. е. пучок частиц должен разделяться на три пучка, каждый из которых отклоняется от первоначального направления на углы

$$\delta\theta(\pm 1) = \pm \frac{\mu M w}{p^2} \frac{\partial B}{\partial y},$$

$$\delta\theta(0) = 0.$$

Покажем теперь, что спин 1 прецессирует в магнитном поле. Пусть магнитное поле направлено вдоль оси $+z$, и в момент времени $t = 0$ спин направлен вдоль оси $+x$. Последнее утверждение означает, что

$$C_{+x}(0) = 1, \quad C_{0x}(0) = C_{-x}(0) = 0.$$

Следовательно,

$$C_{jz}(0) = \sum_{i=0, \pm 1} \langle jz | ix \rangle C_{ix}(0) = \langle jz | +x \rangle \quad (j = 0, \pm 1).$$

Из формул (3.38) «Лекций» (вып. 8, стр. 80) при $\alpha = -\pi/2$ получим

$$\langle +z | +x \rangle = \langle -z | +x \rangle = 1/2, \quad \langle 0z | +x \rangle = 1/\sqrt{2}.$$

Как следует из § 5 гл. 5 «Лекций» (вып. 8, стр. 124), с течением времени амплитуды C_{jz} меняются по закону

$$C_{jz}(t) = e^{i\omega_p t} C_{jz}(0),$$

где $\omega_p = \mu B/\hbar$. Подставив сюда величины $C_{Iz}(0)$, получим

$$C_{+z}(t) = \frac{1}{2} e^{i\omega_p t},$$

$$C_{0z}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$C_{-z}(t) = \frac{1}{2} e^{-i\omega_p t}.$$

Убедимся, что спин вращается в плоскости xy с круговой частотой ω_p . Вычислим амплитуду вероятности проекции спина $+1$ на ось L , расположенную в плоскости xy и составляющую с осью x в момент времени t угол $\beta = -\omega_p t$. Повернем систему координат вокруг оси z на угол β , а затем вокруг оси y на угол $\alpha = \pi/2$. Используя формулы (3.39) и (3.38) «Лекций» (вып. 8, стр. 80), получаем

$$C_{+L}(t) = 1.$$

Это означает, что спин направлен по оси L и, следовательно, вместе с ней вращается в плоскости xy с угловой скоростью ω_p в направлении по часовой стрелке.

Оба явления, рассмотренные в настоящей задаче, — расщепление пучка частиц в неоднородном магнитном поле и прецессия спина в магнитном поле — зависят от магнитного момента и, следовательно, могут быть использованы для его измерения. В первом случае это будет эксперимент типа опытов Штерна и Герлаха, во втором, — например парамагнитный резонанс, когда частица, обладающая магнитным моментом, в магнитном поле резонансно поглощает внешнее радиоизлучение с частотой $\omega = \omega_p$ (см. «Лекции», вып. 7, гл. 35).

К главе 6. Гамильтонова матрица

6.1. Составим прежде всего гамильтонову матрицу для частицы со спином $1/2$ в магнитном поле. Это удобно сделать, выбирая в качестве базисных состояния с определенной проекцией спина на направление магнитного поля т. е. состояния $|+x\rangle$ и $|-x\rangle$. Тогда можно написать

$$\langle +x | H | +x \rangle = -\mu B_0, \quad \langle -x | H | -x \rangle = \mu B_0.$$

$$\langle +x | H | -x \rangle = \langle -x | H | +x \rangle = 0.$$

Используя преобразование, аналогичное выражению (6.28) «Лекций» (вып. 8, стр. 140), нетрудно получить эту матрицу и для базисных состояний $|+z\rangle$, $|-z\rangle$:

$$\langle iz | H | jz \rangle = \sum_{k, l} \langle iz | kx \rangle \langle kx | H | lx \rangle \langle lx | jz \rangle.$$

Амплитуды $\langle lx | jz \rangle$ мы уже вычисляли при решении задачи 4.6, а амплитуды $\langle iz | kx \rangle$ можно получить из соотношения

$$\langle iz | kx \rangle = \langle kx | iz \rangle^*.$$

Тогда

$$\langle +z | H | +z \rangle = \langle -z | H | -z \rangle = 0,$$

$$\langle +z | H | -z \rangle = \langle -z | H | +z \rangle = -\mu B_0.$$

В начальный момент времени после прохождения первого фильтра частица находится в состоянии $|+z\rangle$, так что $C_{+z}(0) = C_1(0) = 1$; $C_{-z}(0) = C_2(0) = 0$. Изменение этих амплитуд во времени определяется следующими уравнениями:

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = -\mu B_0 C_2,$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = -\mu B_0 C_1.$$

Складывая и вычитая почленно эти два уравнения, получаем уравнения для $C_1 + C_2$ и $C_1 - C_2$, которые довольно просто интегрируются. После несложных математических операций получаем решение с учетом начальных условий:

$$C_1(t) = \cos \omega t,$$

$$C_2(t) = i \sin \omega t,$$

где

$$\omega = \mu B_0 / \hbar.$$

Этот результат можно получить и другим способом, не решая систему дифференциальных уравнений, если учесть, что в рассматриваемой системе (спин в магнитном поле B_0) фактически известны состояния с определенной энергией. Это состояния с определенной проекцией спина на направление поля, т. е. на ось x . Состояние $|+x\rangle$ имеет энергию $-\mu B_0$, а состояние $|-x\rangle$ — энергию $+\mu B_0$. Рассмотрим матрицу $U(t, 0)$, связывающую состояние системы $|\psi(t)\rangle$ в момент времени t с начальным состоянием $|\psi(0)\rangle$ (см. § 4 гл. 6 «Лекций», вып. 8):

$$|\psi(t)\rangle = U(t, 0) |\psi(0)\rangle.$$

Матрица $U(t, 0)$ диагональна в представлении состояний с определенной энергией,

$$\langle b | U(t, 0) | a \rangle = \delta_{ab} e^{-iE_a t / \hbar},$$

поэтому

$$\langle +x | U(t, 0) | +x \rangle = e^{i\omega t},$$

$$\langle -x | U(t, 0) | -x \rangle = e^{-i\omega t},$$

$$\langle +x | U(t, 0) | -x \rangle = \langle -x | U(t, 0) | +x \rangle = 0.$$

Тогда компоненты $\langle jz | \psi(t) \rangle$ вектора состояния в произвольный момент времени можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \langle jz | \psi(t) \rangle &= \langle jz | U(t, 0) | \psi(0) \rangle = \\ &= \sum_k \{ \langle jz | +x \rangle e^{i\omega t} \langle +x | kz \rangle \langle kz | \psi(0) \rangle + \\ &\quad + \langle jz | -x \rangle e^{-i\omega t} \langle -x | kz \rangle \langle kz | \psi(0) \rangle \}. \end{aligned}$$

Если подставить сюда функции преобразования $\langle jz | lx \rangle$, $\langle lx | jz \rangle$ и амплитуды в начальный момент времени $\langle +z | \psi(0) \rangle = 1$, $\langle -z | \psi(0) \rangle = 0$, то получим уже известный результат для $C_1(t)$ и $C_2(t)$. Из найденного решения видно, что в моменты времени T_n ,

определяемые соотношением

$$\mu B_0 T_n / \hbar = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

спин частицы направлен вниз.

Чтобы все частицы прошли через второй фильтр, необходимо, чтобы одно из значений T_n совпало со временем пролета T . Минимальное значение поля B_0 , при котором это условие выполняется, определяется соотношением

$$B_0 = \frac{\pi \hbar}{2 \mu T}. \quad (1)$$

Вероятность пройти второй фильтр равна $W = \sin^2 \omega T'$. В частности, если $T' = T/2$, а поле B_0 удовлетворяет соотношению (1), то $W = 1/2$.

6.2. Эту задачу, как и предыдущую, можно решать двумя способами.

1) ввести гамильтонову матрицу и решить систему уравнений для амплитуд $C_i(t)$;

2) учесть, что известны состояния с определенной энергией (в данном случае это состояния с определенной проекцией спина на направление магнитного поля) и ввести матрицу $U(t, 0)$.

В первом способе состояния с определенной энергией знать необязательно, достаточно иметь лишь гамильтонову матрицу. Поэтому он является более общим. Его использование полезно еще и потому, что гамильтонова матрица (гамильтониан) — одно из центральных понятий в квантовой механике, с которого начинается решение почти каждой сложной квантовой задачи.

Обозначим состояния частицы с направлением спина вдоль магнитного поля и против него соответственно через $|+B\rangle$ и $|-B\rangle$ и в этом базисе запишем энергетическую матрицу:

$$\begin{aligned} \langle +B | H | +B \rangle &= -\langle -B | H | -B \rangle = -\mu B, \\ \langle +B | H | -B \rangle &= \langle -B | H | +B \rangle = 0. \end{aligned}$$

Преобразуем эту матрицу к базису $|+z\rangle$, $|-z\rangle$. Необходимые нам величины находим из табл. 4.2 «Лекций» (вып. 8, стр. 105):

$$\begin{aligned} \langle +B | +z \rangle &= \langle -B | -z \rangle = \langle +z | +B \rangle = \langle -z | -B \rangle = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right), \\ \langle +B | -z \rangle &= -\langle -B | +z \rangle = -\langle +z | -B \rangle = \langle -z | +B \rangle = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle +z | H | +z \rangle &= \langle +z | H | -z \rangle = \langle -z | H | +z \rangle = \\ &= -\langle -z | H | -z \rangle = -\mu B / \sqrt{2}. \end{aligned}$$

В начальный момент времени амплитуда вероятности того, что спин направлен вдоль оси $+z$, равна $C_1(0) = 1$, а того, что он имеет противоположное оси z направление, $C_2(0) = 0$. Изменение этих амплитуд во времени определяется системой уравнений

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_1}{dt} &= -\frac{\mu B}{\sqrt{2}} (C_1 + C_2), \\ i\hbar \frac{dC_2}{dt} &= -\frac{\mu B}{\sqrt{2}} (C_1 - C_2). \end{aligned}$$

Решение этой системы уравнений с учетом начальных условий записывается в виде

$$C_1(t) = \cos \omega t + \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \omega t,$$

$$C_2(t) = \frac{i}{\sqrt{2}} \sin \omega t,$$

где $\omega = \mu B / \hbar$.

Найдем теперь амплитуду вероятности того, что частица находится в состоянии с $J_x = \hbar/2$:

$$C_{+x}(t) = \langle +x | +z \rangle C_1(t) + \langle +x | -z \rangle C_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Искомая вероятность обнаружить частицу в состоянии с $J_x = \hbar/2$ тогда равна

$$w_{+x}(t) = |C_{+x}(t)|^2 = \frac{1}{2} (1 + \sin^2 \omega t).$$

Аналогично для состояния с $J_y = \hbar/2$ имеем

$$C_{+y}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\cos \omega t + \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sin \omega t \right),$$

$$w_{+y}(t) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin 2\omega t \right).$$

- 6.3. а) Гамильтонova матрица системы совпадает с полученной при решении задачи 6.1 (в базисе $|+z\rangle, |-z\rangle$), если только заменить μB_0 на A . Начальные условия также совпадают, поэтому можно сразу записать выражения для амплитуд:

$$C_+(t) = \cos \omega t,$$

$$C_-(t) = i \sin \omega t,$$

где $\omega = A/\hbar$. Вероятность обнаружить частицу в момент времени T в состоянии $+z$ равна $\cos^2 \omega t$.

- б) В стационарном состоянии вероятность найти частицу в каждом из базисных состояний не должна изменяться со временем, поэтому система уравнений

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = -AC_2,$$

$$i\hbar \frac{dC_2}{dt} = -AC_1$$

должна иметь решение в виде

$$C_1(t) = e^{-iEt/\hbar} a,$$

$$C_2(t) = e^{-iEt/\hbar} b.$$

Для не зависящих от времени величин a и b получаем

$$Ea = -Ab$$

$$Eb = -Aa.$$

Эта система имеет два нетривиальных решения:

$$1) a_1 = b_1 = 1/\sqrt{2} \text{ при } E_1 = -A,$$

$$2) a_2 = -b_2 = 1/\sqrt{2} \text{ при } E_2 = +A.$$

Значение $1/\sqrt{2}$ выбирается из условия нормировки

$$|a|^2 + |b|^2 = 1.$$

Таким образом, стационарным состояниям отвечают следующие комбинации найденных в п. (а) амплитуд:

$$C_1^{(1)}(t) = C_2^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [C_+(t) + C_-(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\omega t},$$

$$C_1^{(2)}(t) = -C_2^{(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} [C_+(t) - C_-(t)] = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega t},$$

причем энергии соответствующих состояний равны

$$E_1 = -A, \quad E_2 = +A.$$

- в) Рассмотрим амплитуды $C_{+\xi}(t)$ и $C_{-\xi}(t)$ для направления спина по и против некоторой оси ξ , расположенной в плоскости yz и образующей угол φ с осью z . Имеем

$$C_{+\xi}(t) = \langle +\xi | +z \rangle C_+(t) + \langle +\xi | -z \rangle C_-(t) = \cos(\omega t + \varphi/2)$$

$$C_{-\xi}(t) = i \sin(\omega t + \varphi/2).$$

Спин будет направлен вдоль оси ξ , если

$$\varphi = -2\omega t + 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Оси, отвечающие разным значениям n , физически неразличимы, так что можно принять $\varphi = -2\omega t$.

Таким образом, во все моменты времени с вероятностью единицы спин будет направлен вдоль оси, вращающейся в плоскости yz с угловой скоростью 2ω в направлении от оси y к z .

- г) Частицу со спином $1/2$ нужно поместить в магнитное поле, параллельное оси x . Из решения задачи 6.1 ясно, что такая система обладает требуемыми свойствами.

К главе 7. Аммиачный мазер

- 7.1. В гл. 7 «Лекций» (вып. 8) было показано, что вероятность *вынужденного* перехода из состояния $|I\rangle$ в состояние $|II\rangle$

$$P(I \rightarrow II) = 4\pi^2 \frac{\mu^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 c} I(\omega_0) T$$

не зависит от того, сопровождается ли этот переход испусканием или поглощением света. Отсюда следует, что $P(I \rightarrow II) = P(II \rightarrow I)$. Используя определение коэффициентов Эйнштейна, получаем

$$B_{I, II} = \frac{P(I \rightarrow II)}{I(\omega_0) T} = \frac{\pi \mu^2}{\epsilon_0 \hbar^2 c},$$

$$B_{I, II} = B_{II, I}.$$

Попробуем теперь найти с помощью квантовой механики коэффициенты Эйнштейна $A_{II, I}$. Для этого будем рассматривать системы

«молекула в состоянии I и единичный фотон» и «молекула в состоянии II» как два состояния одной и той же системы. Тогда, как следует из гл. 6 «Лекций» (вып. 8), амплитуды перехода в единицу времени из начального состояния в конечное и обратно связаны между собой следующим образом:

$$\langle II | I, \text{ фотон} \rangle = \langle I, \text{ фотон} | II \rangle^* = M.$$

Фактически такое соотношение для испускания и поглощения фотонов уже использовалось в § 4 гл. 2 «Лекций» (вып. 8, стр. 41). Пусть в объеме V имеется молекула в состоянии I и единичный фотон. Тогда вероятность перехода в единицу времени из состояния I в II равна $|M|^2$. С другой стороны, вероятность перехода в данном случае совпадает с «числом» переходов в единицу времени, которое, как показано в гл. 42 «Лекций» (вып. 4), равно $B_{I, II}$. Интенсивность I одного фотона, очевидно, равна $\hbar\omega c/V$, так что

$$|M|^2 = B_{I, II} \hbar\omega \frac{c}{V}.$$

Вероятность обратного перехода (из II в I с испусканием фотона) в единицу времени, приходящаяся на интервал частот $\Delta\omega$, получается из $|M|^2$ умножением на число возможных состояний фотона $V\omega^2\Delta\omega/\pi^2c^3$ [см. формулу (2.42) «Лекций», вып. 8, стр. 49]. Но по определению коэффициента Эйнштейна $A_{II, I}$ эта вероятность равна $A_{II, I}\Delta\omega$. Следовательно,

$$|M|^2 \frac{V\omega^2\Delta\omega}{\pi^2c^3} = A_{II, I}\Delta\omega.$$

Сравнивая последние две формулы, получаем соотношение между коэффициентами Эйнштейна:

$$A_{II, I} = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2c^3} B_{I, II},$$

которое было установлено в гл. 42 «Лекций» (вып. 4) косвенным путем.

Интенсивность спонтанного излучения на интервале частот $\Delta\omega$, очевидно, равна интенсивности для одного фотона, умноженной на число переходов в единицу времени:

$$\Delta I_{\text{сп}} = \hbar\omega \frac{c}{V} \cdot A_{II, I} \Delta\omega = \frac{\mu^2\omega^4 \Delta\omega}{\pi\epsilon_0 c^2 V}.$$

7.2. Запишем систему уравнений для амплитуд вероятности иметь спин «вверх» и «вниз»:

$$i\hbar dC_1/dt = H_{11}C_1 + H_{12}C_2,$$

$$i\hbar dC_2/dt = H_{21}C_1 + H_{22}C_2.$$

Элементы энергетической матрицы можно определить, переходя в систему координат, в которой ось z' направлена вдоль магнитного поля B :

$$H_{11} = \langle +z | +z' \rangle (-\mu B) \langle +z' | +z \rangle + \langle +z | -z' \rangle (\mu B) \langle -z' | +z \rangle,$$

$$H_{22} = \langle -z | +z' \rangle (-\mu B) \langle +z' | -z \rangle + \langle -z | -z' \rangle \mu B \langle -z' | -z \rangle,$$

$$H_{12} = \langle +z | +z' \rangle (-\mu B) \langle +z' | -z \rangle + \langle +z | -z' \rangle \mu B \langle -z' | -z \rangle,$$

$$H_{21} = \langle -z | +z' \rangle (-\mu B) \langle +z' | +z \rangle + \langle -z | -z' \rangle \mu B \langle -z' | +z \rangle = \\ = H_{12}^*.$$

Здесь использован уже известный результат:

$$\begin{aligned} \langle +z' | H | +z' \rangle &= -\langle -z' | H | -z' \rangle = -\mu B, \\ \langle +z' | H | -z' \rangle &= \langle -z' | H | +z' \rangle = 0. \end{aligned}$$

Остается найти амплитуды $\langle jz' | iz \rangle$. Для этого заметим, что ось z' (так же, как и поле B) определяется полярными углами θ и $\varphi = -\omega t$. Переход от системы координат x, y, z к системе x', y', z' можно осуществить поворотом, заданным углами Эйлера $\beta = \varphi - \pi/2$, $\alpha = -\theta$, $\gamma = 0$. С помощью табл. 4.1 «Лекций» (вып. 8, стр. 80) находим

$$\begin{aligned} \langle +z' | +z \rangle &= \cos \frac{\theta}{2} \exp \left[\frac{i}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \langle -z' | +z \rangle &= -i \sin \frac{\theta}{2} \exp \left[\frac{i}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \langle +z' | -z \rangle &= -i \sin \frac{\theta}{2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right], \\ \langle -z' | -z \rangle &= \cos \frac{\theta}{2} \exp \left[-\frac{i}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

Используя эти выражения и соотношение

$$\langle jz' | iz \rangle = \langle iz | jz' \rangle^*,$$

получаем

$$\begin{aligned} H_{11} &= -H_{22} = -\mu B \cos \theta, \\ H_{12} &= H_{21}^* = -\mu B \sin \theta e^{i\omega t}. \end{aligned}$$

Таким образом, задача сводится к решению системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dt} &= \frac{i\omega_0}{2} (\cos \theta \cdot C_1 + \sin \theta e^{i\omega t} C_2), \\ \frac{dC_2}{dt} &= \frac{i\omega_0}{2} (\sin \theta \cdot e^{-i\omega t} C_1 - \cos \theta C_2) \end{aligned}$$

(где $\omega_0 = 2\mu B/\hbar$) с начальными условиями

$$C_1(0) = 1, \quad C_2(0) = 0.$$

В этих уравнениях при малых θ можно вначале пренебречь членами $\sim \sin \theta \approx \theta \ll 1$, а затем учесть их, действуя точно так же, как при решении аналогичной задачи в гл. 7 «Лекций» (вып. 8).

Однако записанные выше уравнения можно решить точно при произвольном θ . Для этого удобно сделать замену $C_1(t) = e^{i\omega t/2} b_1(t)$, $C_2(t) = e^{-i\omega t/2} b_2(t)$, так чтобы коэффициенты в уравнениях не зависели от времени:

$$\begin{aligned} \frac{db_1}{dt} &= \frac{i}{2} [(\omega_0 \cos \theta - \omega) b_1 + \omega_0 \sin \theta \cdot b_2], \\ \frac{db_2}{dt} &= \frac{i}{2} [\omega_0 \sin \theta \cdot b_1 - (\omega_0 \cos \theta - \omega) b_2]. \end{aligned}$$

При этом начальные условия записываются следующим образом:

$$b_1(0) = 1, \quad b_2(0) = 0.$$

Решение этой системы ищем в виде

$$b_1(t) = a_1 e^{iat}, \quad b_2(t) = a_2 e^{iat}.$$

В результате получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\omega_0 \cos \theta - \omega - 2\alpha) a_1 + (\omega_0 \sin \theta) a_2 &= 0, \\ \omega_0 \sin \theta \cdot a_1 - (\omega_0 \cos \theta - \omega + 2\alpha) a_2 &= 0 \end{aligned}$$

Эта система уравнений имеет нетривиальные решения лишь при

$$\alpha = \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_0 \cos \theta - \omega)^2 + (\omega_0 \sin \theta)^2}.$$

Теперь можно записать общее решение исходных уравнений:

$$C_1(t) = e^{i\omega t/2} [a_1^{(1)} e^{i\gamma t} + a_1^{(2)} e^{-i\gamma t}],$$

$$C_2(t) = e^{-i\omega t/2} [a_2^{(1)} e^{i\gamma t} + a_2^{(2)} e^{-i\gamma t}],$$

где

$$\gamma = \alpha_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\omega^2 + \omega_0^2 - 2\omega\omega_0 \cos \theta}.$$

Коэффициенты a_1 и a_2 связаны условием

$$a_2^{(i)} = \frac{\omega_0 \sin \theta}{(\omega_0 \cos \theta - \omega) \pm 2\gamma} a_1^{(i)},$$

где знак «плюс» относится к $i = 1$, а знак «минус» к $i = 2$. Таким образом, учитывая начальные условия, получаем

$$C_1(t) = e^{i\omega t/2} \left(\cos \gamma t + i \frac{\omega_0 \cos \theta - \omega}{2\gamma} \sin \gamma t \right),$$

$$C_2(t) = e^{-i\omega t/2} i \frac{\omega_0 \sin \theta}{2\gamma} \sin \gamma t,$$

откуда находим вероятности для направления спина «вверх» и «вниз» в произвольный момент времени:

$$P_+(t) = \cos^2 \gamma t + \left(\frac{\omega_0 \cos \theta - \omega}{2\gamma} \right)^2 \sin^2 \gamma t,$$

$$P_-(t) = \left(\frac{\omega_0 \sin \theta}{2\gamma} \right)^2 \sin^2 \gamma t.$$

Очевидно, резонанс наступает при частоте

$$\omega = \omega_0 \cos \theta = \frac{2\mu B}{\hbar} \cos \theta.$$

В этом случае $\gamma = (1/2) \omega_0 \sin \theta$, и мы имеем

$$P_+(t) = \cos^2 \gamma t, \quad P_-(t) = \sin^2 \gamma t.$$

Отсюда следует, что спин периодически переворачивается то вверх, то вниз.

К главе 8. Другие системы с двумя состояниями

8.1. Направим ось z противоположно магнитному полю B_0 , а ось x вдоль поля B_1 . Тогда мы имеем $B_x = 2B_1 \cos \omega t$, $B_z = -B_0$, $B_y = 0$. При этом уравнения для спиновых состояний [см. «Лекции», вып. 8, стр. 199, уравнения (8.23)] запишутся в виде

$$i\hbar \frac{dC_1}{dt} = \mu B_0 C_1 - \mu B_x C_2, \quad i\hbar \frac{dC_2}{dt} = -\mu B_0 C_2 - \mu B_x C_1.$$

Начальные условия: $C_1(0) = 1$, $C_2(0) = 0$. Эти уравнения совпадают с уравнениями (7.38) и (7.39) «Лекций» (вып. 8, гл. 7, стр. 164) для молекулы аммиака. Будем решать их аналогично. Полагая

$$C_1(t) = \gamma_1(t) e^{-i\omega_0 t/2}, \quad C_2(t) = \gamma_2(t) e^{i\omega_0 t/2} \\ (\omega_0 = 2\mu B_0/\hbar),$$

для γ_1 и γ_2 получаем следующие уравнения:

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = i\omega_n \cos(\omega t) e^{i\omega_0 t} \gamma_2,$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = i\omega_n \cos(\omega t) e^{-i\omega_0 t} \gamma_1,$$

где $\omega_n = 2\mu B_1/\hbar$.

Частоту ω считаем близкой к ω_0 и по тем же соображениям, что и в гл. 7 «Лекций» (вып. 8), оставляем в уравнениях только члены с $\exp[i(\omega - \omega_0)t]$. Наша система приобретает вид

$$\frac{d\gamma_1}{dt} = i \frac{\omega_n}{2} e^{i(\omega_n - \omega)t} \gamma_2, \quad (1)$$

$$\frac{d\gamma_2}{dt} = i \frac{\omega_n}{2} e^{i(\omega - \omega_n)t} \gamma_1. \quad (2)$$

Дифференцируя уравнение (2) по t и выражая $d\gamma_1/dt$ и γ_1 соответственно из уравнений (1) и (2), получаем

$$\frac{d^2\gamma_2}{dt^2} + i(\omega_0 - \omega) \frac{d\gamma_2}{dt} + \left(\frac{\omega_n}{2}\right)^2 \gamma_2 = 0.$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Такие уравнения мы научились решать, изучая колебания. Ищем решение в виде $\gamma_2 = a e^{i\alpha t}$. Тогда для определения α получаем квадратное уравнение

$$\alpha^2 + (\omega_0 - \omega)\alpha - (\omega_n/2)^2 = 0,$$

из которого находим

$$\alpha_{1,2} = \frac{1}{2} \left[\omega - \omega_0 \pm \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_n^2} \right].$$

Следовательно, общий вид решения

$$\gamma_2(t) = e^{i(\omega - \omega_0)t/2} (a e^{irt} + b e^{-irt}),$$

где

$$r = \frac{1}{2} \sqrt{(\omega - \omega_0)^2 + \omega_n^2}.$$

Для определения постоянных a и b нужно иметь два начальных условия. Одно из них $\gamma_2(0) = 0$ следует из условия $C_2(0) = 0$ и приводит к соотношению $b = -a$. Тогда

$$\gamma_2(t) = 2iae^{i(\omega - \omega_0)t/2} \sin rt.$$

Из условия $C_1(0) = 1$ следует $\gamma_1(0) = 1$. Учитывая уравнение (2), при $t = 0$ имеем $(d\gamma_2/dt)(t=0) = i\omega_n/2$. Подставляя сюда выражение для γ_2 , находим

$$a = \frac{\omega_n}{4r}.$$

Окончательно вероятность того, что в момент времени T спин частицы будет направлен против оси $+z$, т.е. вдоль вектора $\mathbf{B}_0$, равна

$$P_2 = |\gamma_2|^2 = \left(\frac{\omega_n}{2r}\right)^2 \sin^2 rT.$$

В частности, при резонансе ($\omega = \omega_0$)

$$P_2 = \sin^2 \frac{\omega_n T}{2},$$

а вдали от резонанса $[(\omega - \omega_0)^2 \gg \omega_n^2]$

$$P_2 = \left(\frac{\omega_n T}{2}\right)^2 \frac{\sin^2 [(\omega - \omega_0) T/2]}{[(\omega - \omega_0) T/2]^2}.$$

Обратим внимание на сходство этих выражений с формулами (7.50) и (7.52) «Лекций» (вып. 8, стр. 157 и 170).

К главе 9. Еще системы с двумя состояниями

9.1. Пусть в некоторой системе координат гамильтониан записан в виде выражения (9.4) «Лекций» (вып. 8, стр. 206), т.е.

$$H_{IJ} = -\mu[\sigma_{IJ}^x B_x + \sigma_{IJ}^y B_y + \sigma_{IJ}^z B_z],$$

причем величины σ_{IJ}^x , σ_{IJ}^y , σ_{IJ}^z в соответствии с § 1 гл. 9 «Лекций» (вып. 8) образуют матрицы Паули. Иначе говоря, это означает, что в качестве базисных состояний выбраны состояния со спином по и против оси z . Перейдем теперь к другой системе координат, оставив неизменными базисные состояния $|i\rangle$, $|j\rangle$. При этом матричные элементы гамильтониана не изменятся (ср. § 6 гл. 8 «Лекций», стр. 196, где меняются как раз базисные состояния), и в новой системе координат

$$H_{IJ} = -\mu[\sigma_{IJ'}^x B_{x'} + \sigma_{IJ'}^y B_{y'} + \sigma_{IJ'}^z B_{z'}].$$

Выражая $B_{\alpha'}$ ($\alpha' = x', y', z'$) через B_α ($\alpha = x, y, z$):

$$B_{\alpha'} = \sum_{\alpha} C_{\alpha'\alpha} B_{\alpha},$$

находим связь между σ_{IJ}^{α} и $\sigma_{IJ'}^{\alpha'}$, т.е. закон преобразования элементов матриц Паули при поворотах системы координат:

$$\sigma_{IJ}^{\alpha} = \sum_{\alpha'} \sigma_{IJ'}^{\alpha'} C_{\alpha'\alpha}.$$

Учитывая, что величины $C_{\alpha'\alpha}$ образуют ортогональную матрицу, т. е.

$$\sum_{\alpha} C_{\alpha'\alpha} C_{\beta'\alpha} = \delta_{\alpha'\beta'},$$

получаем

$$\sigma_{ij}' = \sum_{\alpha} C_{\alpha'\alpha} \sigma_{ij}^{\alpha}.$$

Но это как раз закон преобразования вектора. Переходя от матричных элементов к матрицам Паули, т. е. опуская индексы i и j , приходим к выводу, что матрицы σ_x , σ_y , σ_z преобразуются друг через друга при поворотах системы координат как компоненты вектора.

Соотношения

$$\sigma \times \sigma = 2i\sigma, \quad \sigma \cdot \sigma = 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

легко проверить непосредственным перемножением матриц Паули. Например,

$$\begin{aligned} (\sigma \times \sigma)_x &= \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = 2i\sigma_x. \end{aligned}$$

Аналогично получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma_z \sigma_x - \sigma_x \sigma_z &= 2i\sigma_y, \\ \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_x &= 2i\sigma_z, \\ \sigma_x \sigma_x + \sigma_y \sigma_y + \sigma_z \sigma_z &= 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Найдем также произведение трех матриц Паули

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- 9.2. а) Для нахождения уровней энергии электрона, присоединенного к молекуле CO_2 , воспользуемся уравнением (9.62) «Лекций» (вып. 8, стр. 239): $\text{Det}(H_{ij} - \delta_{ij}E) = 0$, и будем считать, что в качестве состояний $|1\rangle$, $|2\rangle$, $|3\rangle$ выбраны состояния, описывающие электрон, принадлежащий соответственно первому атому кислорода, атому углерода и второму атому кислорода. Энергии электрона в этих состояниях $H_{11} = H_{22} = E_0$, $H_{33} = E_C$. Поскольку прямые переходы электрона от одного атома кислорода к другому не учитываются, то $H_{12} = H_{21} = 0$. Из соображений симметрии матричные элементы H_{13} и H_{31} , учитывающие переходы электрона от атома углерода к атомам кислорода, равны друг другу. Обозначим их через v . Далее, $H_{21} = H_{12}^* = v^*$, $H_{23} = H_{32}^* = v^*$. Таким образом, чтобы найти уровни энергии рассматриваемой системы, мы должны решить уравнение

$$\begin{vmatrix} E_0 - E & v & 0 \\ v^* & E_C - E & v^* \\ 0 & v & E_0 - E \end{vmatrix} = 0.$$

Расписывая этот детерминант, нетрудно найти корни уравнения:

$$E_{1,2} = \frac{E_0 + E_C}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{E_0 - E_C}{2}\right)^2 + 2|v|^2}, \quad E_3 = E_C.$$

- б) Коэффициенты a_i разложения стационарного состояния по базисным состояниям

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iEt/\hbar} \sum_i a_i |i\rangle$$

определяются системой уравнений

$$\sum_j (H_{ij} - E\delta_{ij}) a_j = 0.$$

При $E_0 = E_C = E_0$ эта система запишется так:

$$\begin{aligned} (E_0 - E) a_1 + v a_2 + 0 \cdot a_3 &= 0, \\ v^* a_1 + (E_0 - E) a_2 + v^* a_3 &= 0, \\ 0 \cdot a_1 + v a_2 + (E_0 - E) a_3 &= 0. \end{aligned}$$

Если подставить значения энергии $E_{1,2} = E_0 \pm |v| \sqrt{2}$, $E_3 = E_0$ и решить систему относительно a_1, a_2, a_3 (с учетом условия нормировки $\sum_{i=1}^3 |a_i|^2 = 1$), то получим

1) для $E_1 = E_0 + |v| \sqrt{2}$

$$a_1 = a_3 = 1/2, \quad a_2 = + (1/\sqrt{2}) e^{-i\alpha}$$

(здесь α — фаза матричного элемента: $v = |v| e^{i\alpha}$);

2) для $E_2 = E_0 - |v| \sqrt{2}$

$$a_1 = a_3 = 1/2, \quad a_2 = - (1/\sqrt{2}) e^{-i\alpha};$$

3) для $E_3 = E_0$

$$a_1 = -a_3 = 1/\sqrt{2}, \quad a_2 = 0.$$

Эти решения показывают, что в первом и втором состояниях электрон с вероятностью $1/2$ «принадлежит» атому углерода и с вероятностью по $1/4$ — каждому из атомов кислорода, тогда как в третьем состоянии он с равными вероятностями (по $1/2$) находится возле атомов кислорода, а вероятность «принадлежать» атому углерода равна нулю.

Следует иметь в виду, что полная система уровней молекулярного иона (CO_2) — гораздо сложнее полученной здесь, поскольку при решении задачи не учитывались внутренние и вращательные степени свободы молекулы CO_2 .

- 9.3. Поскольку молекула CH_4 образует правильный тетраэдр, любой атом водорода расположен одинаковым образом по отношению ко всем остальным атомам водорода. Поэтому амплитуды перехода «дырки» от каждого атома водорода к любому другому одни и те же, так что все недиагональные матричные элементы гамильтониана совпадают:

$$H_{12} = H_{21} = H_{13} = H_{31} = \dots = v,$$

составленная с помощью этой матрицы, очевидно, удовлетворяется при одинаковых коэффициентах $a_i [C_i = a_i \exp(-iEt/\hbar)]$, если $E = E_0 - 2A$. Прежде чем находить значения энергий остальных пяти состояний, определим величину δ . Как видно из условия, при переходе к соседнему атому (по часовой стрелке) амплитуда пребывания электрона в соответствующем атоме умножается на $e^{i\delta}$. Используя свойства симметрии системы, можно в дополнение к соотношениям, приведенным в условии, написать $C_1 = C_6 e^{i\delta}$, или $a_1 = a_6 e^{i\delta}$. С другой стороны, из условия задачи имеем $a_6 = a_1 e^{i5\delta}$. Следовательно, $e^{6i\delta} = 1$ и допустимые значения

$$\delta_k = \frac{2\pi}{6} (k-1) \quad (k=1, 2, \dots, 6).$$

Из условия нормировки $\sum_i |a_i|^2 = 1$ можно определить величину

$a_1 = 1/\sqrt{6}$. Значения энергии, соответствующие найденным коэффициентам $a_j^{(k)}$, можно получить, подставляя $a_j^{(k)} = (1/\sqrt{6}) \exp[i\delta_k(j-1)]$ в систему (1). Из первого уравнения этой системы найдем

$$(E_0 - E) \frac{1}{\sqrt{6}} - A \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\delta_k} - A \frac{1}{\sqrt{6}} e^{5i\delta_k} = 0,$$

откуда

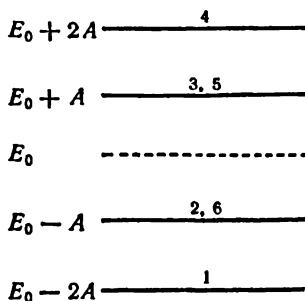
$$E_k = E_0 - 2A \cos \left[\frac{\pi}{3} (k-1) \right] \\ (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

или $E_1 = E_0 - 2A$, $E_2 = E_3 = E_0 - A$, $E_4 = E_5 = E_0 + A$, $E_6 = E_0 + 2A$. Все остальные уравнения системы (1) при этом удовлетворяются тождественно, в чем можно убедиться непосредственной подстановкой.

Коэффициенты C_j получаются из a_j умножением на временной множитель:

$$C_j^{(k)} = a_j^{(k)} e^{-iE_k t/\hbar}.$$

Диаграмма уровней рассматриваемой системы показана на рисунке, где цифрами обозначены номера решений (т.е. значения k):



9.5. а) Уровни энергии определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} E_0 - E & -A & -A \\ -A & E_0 - E & -A \\ -A & -A & E_0 - E \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$E_{1,2} = E_0 + A, \quad E_3 = E_0 - 2A,$$

так что два уровня рассматриваемого молекулярного иона имеют одинаковые энергии, а третий отделен от них интервалом

$$|E_{1,2} - E_3| = 3|A|.$$

- б) Пусть энергия двух базисных состояний изменилась на величину Δ , а третьего — на величину $\Delta + \epsilon A$. Тогда энергетические уровни системы определяются уравнением

$$\begin{vmatrix} W - E & -A & -A \\ -A & W - E & -A \\ -A & -A & W + \epsilon A - E \end{vmatrix} = 0,$$

где $W = E_0 + \Delta$.

Замечая, что этот определитель можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} W - E & -A & -A \\ -A & W - E & -A \\ -A & -A & W - E \end{vmatrix} + \epsilon A \begin{vmatrix} W - E & -A \\ -A & W - E \end{vmatrix} =$$

$$= (W - 2A - E)(W + A - E)^2 + \epsilon A [(W - E)^2 - A^2] =$$

$$= (W + A - E) [(W - 2A - E)(W + A - E) + \epsilon A (W - A - E)],$$

находим $E_1 = W + A = E_0 + \Delta + A$.

Остальные два значения энергии найдем, приравняв нулю квадратную скобку в написанном выше выражении. В результате получим квадратное уравнение. Решая это уравнение и пренебрегая в решении членами второго порядка по ϵ , находим

$$E_2 = E_0 + \Delta + A + \frac{1}{3} \epsilon A, \quad E_3 = E_0 + \Delta - 2A + \frac{2}{3} \epsilon A.$$

Таким образом, если до наложения электрического поля два уровня иона имели одинаковые энергии, то теперь они расщепились на величину $(1/3)|\epsilon A| = |A|/300$, а интервал между первым и третьим уровнями изменился незначительно и стал равным $|3A - (2/3)\epsilon A| \approx 2,993|A|$.

К главе 10. Сверхтонкое расщепление в водороде

- 10.1. Энергии уровней сверхтонкой структуры атома водорода в основном состоянии при наличии магнитного поля даются выражениями (см. гл. 10 «Лекций», вып. 8):

$$E_I = A + \mu B, \quad \mu = -(\mu_e + \mu_p),$$

$$E_{II} = A - \mu B,$$

$$E_{III} = A [-1 + 2\sqrt{1 + (\mu' B/2A)^2}], \quad \mu' = -(\mu_e - \mu_p),$$

$$E_{IV} = -A [1 + 2\sqrt{1 + (\mu' B/2A)^2}].$$

Если магнитное поле мало ($\mu' B \ll 2A$), то первые три из этих значений энергии относятся к состояниям с полным спином $j = 1$ и его проекцией соответственно $m = +1, -1, 0$, а четвертое значение энергии — к состоянию с полным спином $j = 0$. Пренебрегая квадратичными

по B членами, запишем частоты переходов из первых трех состояний в низшее, четвертое состояние:

$$f_1 = \frac{E_I - E_{IV}}{2\pi\hbar} = f_0 + \frac{\mu B}{2\pi\hbar}, \quad f_2 = f_0 - \frac{\mu B}{2\pi\hbar}, \quad f_3 = f_0 = \frac{4A}{2\pi\hbar},$$

где f_0 — частота излучения при переходе между уровнями сверхтонкой структуры свободного атома водорода в основном состоянии (~ 1420 Мгц). Расщепление линии

$$\Delta f = \frac{\mu B}{2\pi\hbar}$$

оказывается равным в межзвездном пространстве $\sim 14,0$ гц, в магнитном поле Земли $\sim 0,70$ Мгц. (При $B = 1$ гс имеем $\mu B / 2\pi\hbar = 1,397048013 \cdot 10^6$ гц.) Изменения длины волны соответственно равны $\sim 2 \cdot 10^{-7}$ и $1 \cdot 10^{-2}$ см.

При больших полях, когда выполнено условие $\mu' B \gg A$, уровни сверхтонкой структуры уже нельзя характеризовать значением полного спина, а энергии уровней можно записать в виде

$$\begin{aligned} E_I &= A + \mu B, & E_{II} &= A - \mu B, \\ E_{III} &= -A + \mu' B, & E_{IV} &= -A - \mu' B. \end{aligned}$$

Тогда частоты переходов из состояний I, II, III в низшее состояние IV запишутся следующим образом:

$$f_1 = \frac{1}{2} f_0 + \frac{|\mu_e| B}{\pi\hbar}, \quad f_2 = \frac{1}{2} f_0 + \frac{\mu_p B}{\pi\hbar}, \quad f_3 = \frac{\mu' B}{\pi\hbar}.$$

При $B = 10^5$ гс

$$\begin{aligned} f_1 &= 0,28064114 \cdot 10^{13} \text{ гц}, & f_2 &= 0,11359225 \cdot 10^{10} \text{ гц}, \\ f_3 &= 0,280356521 \cdot 10^{12} \text{ гц}. \end{aligned}$$

Соответствующие длины волн равны

$$\lambda_1 = 0,10689 \text{ см}, \quad \lambda_2 = 26,41062 \text{ см}, \quad \lambda_3 = 0,10701 \text{ см}.$$

К главе 11. Распространение в кристаллической решетке

11.1. Обозначим амплитуду пребывания электрона около n -го атома в состоянии i через C_n^i , а в состоянии j — через C_n^j . Они удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{dC_n^i}{dt} &= E_i C_n^i - B(C_{n-1}^i + C_{n+1}^i) - A(C_{n-1}^j + C_{n+1}^j), \\ i\hbar \frac{dC_n^j}{dt} &= E_j C_n^j - B(C_{n-1}^j + C_{n+1}^j) - A(C_{n-1}^i + C_{n+1}^i). \end{aligned} \quad (1)$$

Для стационарных состояний зависимость амплитуд от времени дается выражениями

$$C_n^i = a_n^i e^{-iE_i t/\hbar}, \quad C_n^j = a_n^j e^{-iE_j t/\hbar}.$$

Подставляя эти выражения в (1), получаем систему уравнений для коэффициентов a_n :

$$\begin{aligned} (E_i - E) a_n^i - A(a_{n-1}^i + a_{n+1}^i) - B(a_{n-1}^j + a_{n+1}^j) &= 0, \\ (E_j - E) a_n^j - A(a_{n-1}^j + a_{n+1}^j) - B(a_{n-1}^i + a_{n+1}^i) &= 0. \end{aligned}$$

Решение этой системы ищем в виде

$$a_n^i = \alpha_i e^{ikx_n}, \quad a_n^j = \alpha_j e^{ikx_n},$$

где $x_n = bn$. Тогда α_i и α_j удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} (E_i - 2A \cos kb - E) \alpha_i - (2B \cos kb) \alpha_j &= 0, \\ -(2B \cos kb) \alpha_i + (E_j - 2A \cos kb - E) \alpha_j &= 0, \end{aligned}$$

условием разрешимости которой является обращение в нуль следующего определителя:

$$\begin{vmatrix} E_i - 2A \cos kb - E & -2B \cos kb \\ -2B \cos kb & E_j - 2A \cos kb - E \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая этот определитель и решая результирующее квадратное уравнение относительно E , получаем две области допустимых

значений энергии:

$$E_1 = \frac{1}{2} [E_I + E_J + \sqrt{(E_I - E_J)^2 + 16B^2 \cos^2 kb}] - 2A \cos kb,$$

$$E_2 = \frac{1}{2} [E_I + E_J - \sqrt{(E_I - E_J)^2 + 16B^2 \cos^2 kb}] - 2A \cos kb.$$

В предельном случае $|E_I - E_J| \gg 4|B|$ получаем просто две независимые области (полосы), расположенные вокруг энергий E_I и E_J :

$$E_1 = E_I - 2A \cos kb,$$

$$E_2 = E_J - 2A \cos kb.$$

Этот результат совершенно аналогичен полученному в § 1 гл. II «Лекций» (вып. 9), когда учитывается лишь одно состояние электрона в атоме. Это и понятно: ведь условие $|E_I - E_J| \gg 4|B|$ фактически означает, что полосы можно рассматривать независимо друг от друга.

В другом случае $|E_I - E_J| \ll 4|B|$ получаем

$$E_1 = \frac{E_I + E_J}{2} - 2(A - B) \cos kb,$$

$$E_2 = \frac{E_I + E_J}{2} - 2(A + B) \cos kb.$$

Здесь обе полосы расположены вокруг общего «центра тяжести» $(E_I + E_J)/2$, причем одна полоса лежит внутри другой.

11.2. Записываем систему уравнений для амплитуд

$$i\hbar \frac{dC_n^a}{dt} = (E_0 + \Delta E) C_n^a - A(C_{n-1}^b + C_n^b),$$

$$i\hbar \frac{dC_n^b}{dt} = (E_0 - \Delta E) C_n^b - A(C_n^a + C_{n+1}^a)$$

и ищем решение в виде

$$C_n^a = \alpha \exp [i(kx_n^a - Et/\hbar)],$$

$$C_n^b = \beta \exp [i(kx_n^b - Et/\hbar)].$$

Координата n -го атома типа a равна $x_n^a = 2nc$, а для типа b она равна $x_n^b = (2n+1)c$. При этом для величин α и β получаем систему алгебраических уравнений

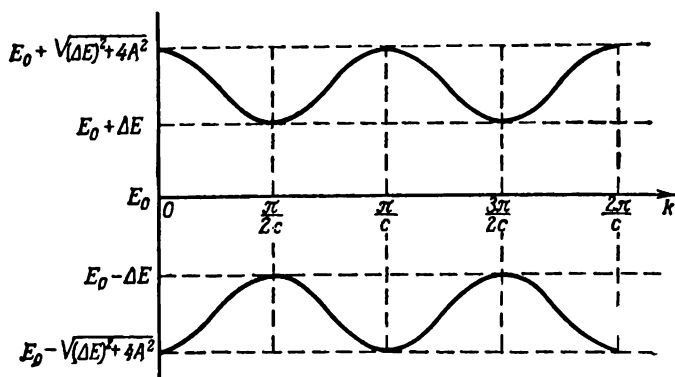
$$(E_0 + \Delta E - E) \alpha - (2A \cos kc) \beta = 0,$$

$$-(2A \cos kc) \alpha + (E_0 - \Delta E - E) \beta = 0.$$

Требование обращения в нуль определителя этой системы дает

$$E = E_0 \pm \sqrt{(\Delta E)^2 + (2A \cos kc)^2}.$$

Примерная зависимость энергии E от волнового числа k показана на рисунке.



Из рисунка, как и из формулы для E , видно, что если k изменяется от нуля до $\pi/2c$, то энергия принимает все свои допустимые значения: в верхней полосе от $E_0 + \sqrt{(\Delta E)^2 + 4A^2}$ до $E_0 + \Delta E$, а в нижней от $E_0 - \Delta E$ до $E_0 - \sqrt{(\Delta E)^2 + 4A^2}$.

11.3. Будем исходить из уравнений для не зависящих от времени амплитуд a_n [таких, что $C_n(t) = a_n e^{-iEt/\hbar}$]. Имеем

$$\begin{aligned} E a_n &= E_0 a_n - A a_{n+1} - A a_{n-1} & (n \leq -2); \\ E a_{-1} &= E_0 a_{-1} - B a_0 - A a_{-2}; \\ E a_0 &= E_0 a_0 - B a_{+1} - B a_{-1}; \\ E a_{+1} &= E_0 a_{+1} - A a_2 - B a_0; \\ E a_n &= E_0 a_n - A a_{n-1} - A a_{n+1} & (n \geq 2). \end{aligned}$$

Решения ищем в виде

$$\begin{aligned} a_n &= e^{ikx_n} + \beta e^{-ikx_n} \quad \text{для } n < 0, \\ a_n &= \gamma e^{ikx_n} \quad \text{для } n > 0, \end{aligned}$$

причем $x_n = bn$.

Из уравнений для $|n| \geq 2$ можно сразу же получить допустимые значения энергии

$$E = E_0 - 2A \cos kb.$$

Остались три уравнения:

$$\begin{aligned} (E_0 - E)(e^{-ikb} + \beta e^{ikb}) - B a_0 - A(e^{-2ikb} + \beta e^{2ikb}) &= 0, \\ (E_0 - E)a_0 - B(e^{-ikb} + \beta e^{ikb}) - B\gamma e^{ikb} &= 0, \\ (E_0 - E)\gamma e^{ikb} - B a_0 - A\gamma e^{2ikb} &= 0. \end{aligned}$$

Из первого и третьего уравнений с учетом соотношения $E_0 - E = A(e^{ikb} + e^{-ikb})$ получим соответственно

$$\beta = \frac{B}{A} a_0 - 1$$

и

$$\gamma = \frac{B}{A} a_0 = \beta + 1.$$

Подставив теперь эти выражения во второе уравнение, найдем

$$a_0 = \frac{iAB \sin kb}{(B^2 - A^2) \cos kb + iB^2 \sin kb}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{iB^2 \sin kb}{(B^2 - A^2) \cos kb + iB^2 \sin kb}, \\ \beta &= \gamma - 1 = \frac{(A^2 - B^2) \cos kb}{(B^2 - A^2) \cos kb + iB^2 \sin kb}. \end{aligned}$$

Как и должно быть, найденные величины, «амплитуда прохождения» γ и «амплитуда отражения» β , удовлетворяют условию $|\beta|^2 + |\gamma|^2 = 1$.

11.4. а) Из соотношения $|\beta|^2 + |1 + \beta|^2 = 1$ следует

$$2\beta\beta^* + \beta + \beta^* = 0,$$

или

$$\beta(\beta^* + 1) + \beta^*(\beta + 1) = 0.$$

Поделив последнее соотношение на $(\beta + 1)(\beta^* + 1)$, получим

$$\frac{\beta}{\beta + 1} + \frac{\beta^*}{\beta^* + 1} = 2 \operatorname{Re} \frac{\beta}{\beta + 1} = 0.$$

б) Представим β в виде $i|\beta|e^{i\eta}$ и воспользуемся соотношением $|\beta|^2 + \operatorname{Re} \beta = 0$. Следовательно, $|\beta|^2 - |\beta| \sin \eta = 0$, откуда $|\beta| = \sin \eta$. Таким образом,

$$\beta = ie^{i\eta} \sin \eta.$$

11.5. Если крайнему атому левого кристалла приписать номер нуль, то система уравнений для амплитуд a_n запишется в виде

$$(E_0 - E)a_n - A(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0 \quad (n \leq -1),$$

$$(E_0 - E)a_0 - Aa_{-1} - Ba_1 = 0,$$

$$(E'_0 - E)a_1 - Ba_0 - A'a_2 = 0,$$

$$(E'_0 - E)a_n - A'(a_{n-1} + a_{n+1}) = 0 \quad (n \geq 2).$$

Решение для области I ищем в виде суммы падающей и отраженной волн

$$a_n (n \leq 0) = e^{ikx_n} + \beta e^{-ikx_n}, \quad x_n = bn,$$

а для области II — в виде прошедшей волны

$$a_n (n \geq 1) = \gamma e^{ik'x'_n}.$$

Тогда из уравнений для $n \leq -1$ получим допустимые значения энергии

$$E = E_0 - 2A \cos kb.$$

С другой стороны, та же энергия E (из уравнений для $n \geq 2$) равна

$$E = E'_0 - 2A' \cos k'b'.$$

Это означает, что волновые числа в областях I и II связаны соотношением

$$E_0 - 2A \cos kb = E'_0 - 2A' \cos k'b'.$$

а) Обратимся теперь к оставшимся второму и третьему уравнениям. Подставим в них явный вид амплитуд a_{-1} , a_0 , a_1 , a_2 и воспользуемся соотношениями

$$\begin{aligned} E_0 - E &= A(e^{ikb} + e^{-ikb}), \\ E'_0 - E &= A'(e^{ik'b'} + e^{-ik'b'}). \end{aligned}$$

Тогда второе уравнение преобразуется к виду

$$Ae^{-ikb}\beta + Ae^{ikb} - Be^{ik'b'}\gamma = 0, \quad (1)$$

а третье уравнение сразу дает искомое соотношение

$$\gamma = \frac{B}{A'}(1 + \beta).$$

б) Подставив последнее выражение для γ в уравнение (1), находим

$$\beta = -\frac{AA'e^{ikb} - B^2e^{ik'b'}}{AA'e^{-ikb} - B^2e^{ik'b'}}.$$

Если k' — мнимое число, т. е. $k' = ik$, то $e^{ik'b'} = e^{-kb'}$. Поскольку A , A' и B — вещественные числа (как и kb), то числитель и знаменатель являются величинами, комплексно сопряженными относительно друг друга. Таким образом, $|\beta| = 1$. Но величина $|\beta|^2$ представляет собой долю отраженных частиц. Следовательно, все частицы, достигающие поверхности раздела, должны отражаться от нее. Этот результат нетрудно понять: мнимость волнового числа k' означает отсутствие потока частиц в области II; иначе говоря, это означает, что частица не может свободно распространяться в области II (хотя и может «забежать» в нее с краю). Это случится, если энергия частицы, налетающей слева на границу раздела, не попадает в область энергий, допустимых для свободного распространения частицы в правом кристалле, т. е.

$$|E_0 - E'_0| \geq 2|A| + 2|A'|.$$

- в) Для проверки закона сохранения числа частиц найдем прежде всего групповые скорости

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk} = \frac{b}{\hbar} 2A \sin kb$$

и

$$v'_g = \frac{1}{\hbar} \frac{dE}{dk'} = \frac{b'}{\hbar} 2A' \sin k'b'.$$

Заметим, что

$$\frac{v'_g/b'}{v_g/b} = \frac{A' \sin k'b'}{A \sin kb}.$$

Используя связь между β и γ , а также явный вид β , находим

$$\gamma = \frac{B}{A'} (1 + \beta) = - \frac{2iAB \sin kb}{AA'e^{-ikb} - B^2 e^{ik'b'}}.$$

Тогда

$$|\gamma|^2 = \frac{4A^2 B^2 \sin^2 kb}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

Из явного вида β получаем

$$|\beta|^2 = \frac{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb - k'b')}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

В числителе этого выражения добавим и вычтем величину $2AA'B^2 \cos(kb + k'b')$. Преобразуя разность косинусов, получаем

$$|\beta|^2 = 1 - \frac{4AA'B^2 \sin kb \sin k'b'}{(AA')^2 + B^4 - 2AA'B^2 \cos(kb + k'b')}.$$

Но дробь в правой части этого выражения как раз равна $|\gamma|^2 (v'_g/b') (v_g/b)^{-1}$. Таким образом, получаем закон сохранения числа частиц

$$|\beta|^2 + |\gamma|^2 \frac{v'_g/b'}{v_g/b} = 1.$$

Появление множителя при $|\gamma|^2$ можно пояснить следующим образом. Закон сохранения числа частиц означает, что поток частиц, приходящих слева, равен сумме потоков частиц, прошедших границу и отраженных от нее. Величины $|\beta|^2$ и $|\gamma|^2$ пропорциональны вероятности для частицы находиться вблизи данного атома, т.е. плотности числа частиц в том или другом потоке. А для того чтобы получить величину потока, нужно умножить плотность частиц на их скорость. При этом скорость определяется количеством атомов, через которые проходит частица в единицу времени, т.е. нужно поделить v_g на b .

Полезно заметить, что полученное выше соотношение несправедливо при мнимом k' . В этом случае поток в области II отсутствует, и закон сохранения числа частиц принимает вид $|\beta|^2 = 1$.

К главе 12. Полупроводники

12.1. Запишем уравнение движения электрона в полупроводнике в компонентной форме. Имеем следующие три уравнения:

$$\frac{dv_x}{dt} + \frac{1}{\tau} v_x = \frac{q}{m^*} E_x + \omega_c v_y,$$

$$\frac{dv_y}{dt} + \frac{1}{\tau} v_y = -\omega_c v_x,$$

$$\frac{dv_z}{dt} + \frac{1}{\tau} v_z = 0.$$

Уравнение для z -компоненты скорости решается элементарно ($v_z = v_{0z} e^{-t/\tau}$) и для наших целей не представляет интереса. Для решения первых двух уравнений удобно заменить

$$E_x = E_0 \cos \omega t = \operatorname{Re} (E_0 e^{i\omega t})$$

комплексной величиной $E_x = E_0 e^{i\omega t}$.

Решение уравнений ищем в виде

$$v_x = a e^{i\omega t}, \quad v_y = b e^{i\omega t},$$

где a и b — комплексные постоянные величины, для которых получаем систему алгебраических уравнений

$$\left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)a - \omega_c b = \frac{qE_0}{m^*},$$

$$\omega_c a + \left(i\omega + \frac{1}{\tau}\right)b = 0.$$

Решая их, находим

$$v_x = \frac{1 + i\omega\tau}{(1 + i\omega\tau)^2 + \omega_c^2 \tau^2} \frac{q\tau E_0}{m^*} e^{i\omega t}.$$

Таким образом, мы получили искомое соотношение

$$\frac{v_x}{E_x} = \frac{q\tau}{m^*} \frac{1 + i\omega\tau}{1 + (\omega_c^2 - \omega^2)\tau^2 + 2i\omega\tau}.$$

Мощность, поглощаемую электроном от поля, определим по формуле

$$P = q \operatorname{Re} v_x \operatorname{Re} E_x,$$

причем $\operatorname{Re} E_x = E_0 \cos \omega t$, а величину $\operatorname{Re} v_x$ запишем следующим образом:

$$\operatorname{Re} v_x = \operatorname{Re} \left(\frac{v_x}{E_x} E_x \right) = \operatorname{Re} \left(\frac{v_x}{E_x} \right) \operatorname{Re} E_x - \operatorname{Im} \left(\frac{v_x}{E_x} \right) \operatorname{Im} E_x.$$

Следовательно, мощность, поглощаемая электроном, равна

$$P(t) = qE_0^2 \operatorname{Re} \left(\frac{v_x}{E_x} \right) \cos^2 \omega t - qE_0^2 \operatorname{Im} \left(\frac{v_x}{E_x} \right) \cos \omega t \sin \omega t.$$

При усреднении по периоду $T = 2\pi/\omega$ второе слагаемое обращается в нуль, поскольку отношение v_x/E_x не зависит от времени, а интеграл $\int_0^T \cos \omega t \sin \omega t dt$ равен нулю. Таким образом, средняя за период поглощенная мощность пропорциональна $\text{Re}(v_x/E_x)$:

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} q E_0^2 \text{Re} \left(\frac{v_x}{E_x} \right).$$

Проанализируем частотную зависимость поглощаемой мощности. Имеем

$$\text{Re} \left(\frac{v_x}{E_x} \right) = \frac{1 + (\omega_c^2 + \omega^2) \tau^2}{[1 + (\omega_c^2 - \omega^2) \tau^2]^2 + 4\omega^2 \tau^2} \frac{q\tau}{m^*}.$$

При $\omega_c \tau \gg 1$ это выражение существенно упрощается. Введем обозначение $\Delta\omega = \omega - \omega_c$ и будем считать, что $|\Delta\omega| \ll \omega_c$. Тогда получим

$$\text{Re} \left(\frac{v_x}{E_x} \right) = \frac{1}{1 + (\Delta\omega)^2 \tau^2} \frac{q\tau}{2m^*}.$$

Это означает, что поглощаемая мощность максимальна при $\omega = \omega_c$ ($\Delta\omega = 0$), причем ширина максимума (определяемая по частотам, при которых поглощаемая мощность вдвое меньше максимальной) равна $2/\tau$. Измеряя частоту, отвечающую максимуму поглощения, и ширину этого максимума, можно получить m^* и τ .

Предположим теперь, что $\omega_c \tau$ уменьшается. Когда эта величина становится сравнимой с единицей, полученная выше упрощенная формула становится неприменимой. Чтобы понять, что происходит с зависимостью поглощенной мощности от частоты, исследуем случай $\omega_c \tau \ll 1$, иначе говоря, положим $\omega_c = 0$. Тогда

$$\text{Re} \left(\frac{v_x}{E_x} \right) = \frac{q\tau}{m^*} \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2},$$

т.е. частотная зависимость этой величины не содержит максимума при отличных от нуля частотах, т.е. резонанс не наблюдается. Переход между двумя предельными формами частотной зависимости происходит где-то в области $\omega_c \tau \sim 1$. Условие $\omega_c \tau > 1$ означает, что время между столкновениями τ больше, чем период обращения электрона. Ясно, что только в этом случае движение электрона является периодическим (по крайней мере, между столкновениями) и, стало быть, возможно наблюдение резонанса.

- 12.2. «Ток тепловых дырок» I_T , текущий из области p в область n , пропорционален концентрации таких дырок в p -области, энергия которых достаточна для преодоления барьера:

$$I_T \sim N_p(p) \exp \left[-q(V_0 + V)/kT \right];$$

здесь V_0 — разность потенциалов между n - и p -областями в условиях равновесия, V — дополнительная разность потенциалов, приложенная извне, а $N_p(p)$ — полная концентрация дырок в p -области.

Если же дырки переходят из n - в p -область, то им не нужно преодолевать барьер, так что создаваемый ими ток I_g будет пропорционален всей концентрации дырок в n -области:

$$I_g \sim N_p(n).$$

Результирующий дырочный ток I_p равен разности этих двух токов:

$$I_p = I_g - I_r = I_r \left(\frac{I_g}{I_r} - 1 \right) = I_r \left\{ \frac{N_p(n)}{N_p(p)} \exp [q(V_0 + V)/kT] - 1 \right\}.$$

В условиях равновесия (при $V = 0$) результирующий ток должен быть равен нулю. Из этого условия получаем отношение концентраций дырок в n - и p -областях:

$$N_p(n)/N_p(p) = \exp [-qV_0/kT].$$

Тогда при отличном от нуля внешнем потенциале V имеем

$$I_p = I_r [\exp (qV/kT) - 1].$$

Точно так же записывается выражение для тока отрицательных носителей (электронов). Следовательно, полный ток в $p-n$ -переходе

$$I = (I_r + I_e) [\exp (qV/kT) - 1].$$

Здесь I_e — ток электронов из области n в область p при равновесных условиях.

Величину $I_r + I_e$ можно интерпретировать как максимальный ток, который может течь при отрицательной внешней разности потенциалов.

К главе 13. Приближение независимых частиц

- 13.1. В приближении независимых частиц энергия рассматриваемой системы равна сумме энергий каждого из электронов, осуществляющих двойные связи. Такой электрон может «принадлежать» одному из четырех атомов углерода и иметь энергию E_0 . Однако наличие переходов электрона от одного атома к соседнему делает такие состояния нестационарными. Матричный элемент перехода равен $-A$, и, как показано в § 5 гл. 13 «Лекций» (вып. 9, стр. 334, 335), энергия стационарного состояния электрона для молекулы бутадиена ($N=4$) может принимать значения

$$E_s = E_0 - 2A \cos \left(\frac{\pi}{5} s \right) \quad (s = 1, 2, 3, 4).$$

Тот же результат можно получить, приравнявая нулю детерминант, составленный с помощью энергетической матрицы H_{ij} . Тогда значения энергии определяются корнями уравнения:

$$\begin{vmatrix} E_0 - E & -A & 0 & 0 \\ -A & E_0 - E & -A & 0 \\ 0 & -A & E_0 - E & -A \\ 0 & 0 & -A & E_0 - E \end{vmatrix} = 0.$$

Расписывая определитель, получаем биквадратное уравнение

$$(E - E_0)^4 - 3A^2 (E - E_0)^2 + A^4 = 0,$$

решения которого записываются следующим образом:

$$E_1 = E_0 - \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} A \approx E_0 - 1,618A,$$

$$E_2 = E_0 - \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} A \approx E_0 - 0,618A,$$

$$E_3 = E_0 + \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} A \approx E_0 + 0,618A,$$

$$E_4 = E_0 + \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} A \approx E_0 + 1,618A.$$

Любопытно, что, сравнивая эти выражения с написанным выше выражением для E_s , можно получить

$$\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}},$$

хотя никакой тригонометрии мы здесь не занимались.

В основном состоянии молекулы бутадиена два электрона, осуществляющие двойные связи, имеют энергию E_1 (один со спином «вверх», другой — со спином «вниз»), а два других электрона — энергию E_2 . Если же состояние молекулы бутадиена соответствует первому возбужденному уровню, то один из электронов, имевших в основном состоянии энергию E_2 , будет иметь энергию E_3 . Таким образом, энергия излучения, испускаемого молекулой бутадиена при переходе с первого возбужденного на основной уровень, равна

$$\hbar\omega = E_3 - E_2 = \sqrt{2(3 - \sqrt{5})} A \approx 1,236A.$$

Найти длину волны этого излучения теперь не представляет труда:

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi\hbar c}{1,236A}.$$

Если $A = 1$ эв, то $\lambda = 1,00 \cdot 10^{-4}$ см.

Займемся теперь вопросом о распределении электронов в молекуле. Если энергия электрона равна E_s , то, как следует из § 5 гл. 13 «Лекций» (вып. 9), амплитуда вероятности нахождения этого электрона возле n -го атома равна

$$a_n^{(s)} = D_s \sin\left(\frac{\pi s}{5} n\right).$$

Нормировочный множитель D_s выберем так, чтобы выполнялось условие нормировки $\sum_{n=1}^4 |a_n^{(s)}|^2 = 1$.

Тогда для состояния электрона с энергией E_1 ($s = 1$) получим

$$a_1^{(1)} = a_4^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}},$$

$$a_2^{(1)} = a_3^{(1)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

Аналогично для $s=2$ имеем

$$a_1^{(2)} = -a_4^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{5}}},$$

$$a_2^{(2)} = -a_3^{(2)} = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}}.$$

В однократно ионизованной молекуле бутадиена два электрона находятся в состоянии с энергией E_1 и один электрон — в состоянии с энергией E_2 . Тогда вероятность обнаружить какой-либо электрон возле n -го атома можно записать следующим образом:

$$p_n = 2 |a_n^{(1)}|^2 + 1 \cdot |a_n^{(2)}|^2.$$

Подставляя сюда величины $a_n^{(s)}$, получаем

$$p_1 = p_4 = \frac{1}{4} \left(3 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0,6382,$$

$$p_2 = p_3 = \frac{1}{4} \left(3 + \frac{1}{\sqrt{5}} \right) = 0,8618.$$

Отсюда можно сделать вывод, что возле крайних атомов углерода находится примерно по 0,64 электрона, а возле средних — по 0,86 электрона.

- 13.2. Чтобы найти энергию, необходимую для разрыва бензольного кольца, необходимо знать энергии конфигураций a и b , приведенных на рисунке в условии задачи. В § 4 гл. 13 «Лекций» (вып. 9, стр. 332) показано, что в приближении независимых частиц энергия основного состояния конфигурации a равна

$$E_a = 6E_0 - 8A.$$

Энергию конфигурации b найдем по методу, изложенному в § 5 гл. 13 «Лекций». Конфигурация b представляет собой линию из шести атомов углерода, причем энергия электрона, осуществляющего двойную связь и принадлежащего какому-либо из этих атомов, равна E_0 , а матричный элемент перехода электрона к соседнему атому равен $-A$. Тогда одночастичная энергия электрона в стационарном состоянии $E = E_0 - 2A \cos kb$. Величина kb определяется условием, что амплитуда вероятности пребывания электрона около n -го атома, равная $\sin(kbn)$, обращается в нуль при $n=7$, т.е. для отсутствующего седьмого (как и для нулевого) атома. Следовательно, $kb = (\pi/7)s$, где $s = 1, 2, \dots, 6$.

В основном состоянии конфигурации b на низших одночастичных уровнях

$$E_1 = E_0 - 2A \cos(\pi/7),$$

$$E_2 = E_0 - 2A \cos(2\pi/7),$$

$$E_3 = E_0 - 2A \cos(3\pi/7)$$

будет находиться по два электрона. Поэтому полная энергия основного состояния конфигурации b дается выражением

$$E_b = 6E_0 - 4A \left(\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} \right).$$

Таким образом, необходимая для разрыва бензольного кольца энергия равна

$$E_6 - E_a = 4A \left(2 - \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right).$$

Величину A найдем по известной длине волны, которая излучается при переходе молекулы бензола из первого возбужденного состояния в основное. Для этого замечаем, что энергия молекулы при таком переходе изменяется на величину $2A$, которая, с другой стороны, равна $\hbar\omega = 2\pi\hbar c/\lambda$. Таким образом, мы можем написать

$$E_6 - E_a = \frac{4\pi\hbar c}{\lambda} \left(2 - \cos \frac{\pi}{7} - \cos \frac{2\pi}{7} - \cos \frac{3\pi}{7} \right).$$

Подставляя сюда $\lambda = 2000 \text{ \AA}$, значения косинусов и другие известные константы, получаем

$$E_6 - E_a = 3,1 \text{ эв}.$$

- 13.3. Будем рассматривать спиновую волну как «частицу» с массой $m_{\text{эф}}$ и энергией E_K . Наличие в системе такой частицы, называемой магноном, означает, что спин одного из атомов направлен вниз, тогда как спины всех других атомов смотрят вверх. Поэтому спин всей системы при наличии магнона отличается от спина основного состояния (когда нет магнонов) на единицу. Следовательно, магноны имеют целый спин и подчиняются статистике Бозе — Эйнштейна. Среднее число магнонов в состоянии с энергией E_K при температуре системы T определяется формулой

$$\bar{n} = \frac{1}{e^{E_K/kT} - 1}.$$

Эта формула была получена в § 5 гл. 2 «Лекций» (вып. 8, стр. 44) для фотонов, но из ее вывода ясно, что она применима и для других бозонов. Но число магнонов в системе как раз и равно числу атомов, спины которых «перевернуты» по сравнению с его направлением в основном состоянии.

Подсчитаем теперь полное число магнонов в системе. Для этого вспомним (см. § 5 гл. 2 «Лекций», вып. 8), что в ящике объемом V число типов колебаний, приходящееся на интервал волновых чисел от K до $K + dK$, равно

$$\Delta \mathcal{N}(K) = V \frac{d^3 K}{(2\pi)^3}.$$

Полное число магнонов в системе равно

$$N_{\downarrow} = V \int \frac{d^3 K / (2\pi)^3}{e^{E_K/kT} - 1}.$$

Следовательно, для числа атомов со спином «вниз» в единице объема имеем

$$\frac{N_{\downarrow}}{V} = \int \frac{d^3 K / (2\pi)^3}{e^{E_K/kT} - 1}.$$

Намагниченность материала определяется как магнитный момент, приходящийся на единицу объема. Обозначим магнитный момент атома через μ . Магнитный момент атома направлен в ту же сторону, что и его спин (или в противоположную, если μ отрицателен), поэтому магнитный момент единицы объема можно выразить через число атомов со спином «вверх» $N_{\uparrow}/V$ и «вниз» $N_{\downarrow}/V$:

$$M = \mu \frac{N_{\uparrow}}{V} - \mu \frac{N_{\downarrow}}{V} = \mu \left(\frac{N}{V} - 2 \frac{N_{\downarrow}}{V} \right).$$

Вспомня, что расстояние между атомами решетки равно b , получаем полное число атомов в единице объема:

$$N/V = 1/b^3.$$

Следовательно, намагниченность дается выражением

$$M = \frac{\mu}{b^3} \left(1 - 2b^3 \int \frac{d^3K/(2\pi)^3}{e^{E_K/kT} - 1} \right).$$

Основной вклад в интеграл, очевидно, дают энергии E_K , удовлетворяющие условию $E_K < kT$. При низких температурах этому условию удовлетворяют лишь самые малые значения E_K , для которых можно приближенно записать $E_K \approx Ab^2K^2$. При этом формально интеграл по K можно вычислять от нуля до бесконечности, поскольку большие значения K все равно не дадут существенного вклада. Выполняя интегрирование по угловым переменным $\left(\int d\Omega = 4\pi \right)$ и переходя к безразмерной переменной $x = (A/kT)^{1/2} bK$, получаем

$$\frac{M}{M_{\text{насыщ}}} = 1 - 2 \left(\frac{kT}{4\pi A} \right)^{3/2} \left[\frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} \right];$$

здесь $M_{\text{насыщ}} = \mu/b^3$ — предельное значение намагниченности при $T \rightarrow 0$.

Стоящий в квадратных скобках интеграл можно вычислить следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dx}{e^{x^2} - 1} = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{x^2 e^{-x^2} dx}{1 - e^{-x^2}} = \\ &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} x^2 e^{-x^2} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(n-1)x^2} dx. \end{aligned}$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования, получаем

$$I = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} x^2 e^{-nx^2} dx.$$

После замены переменных $x = t\sqrt{n}$ и интегрирования по частям получим интеграл ошибок. Таким образом,

$$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}.$$

Ряд такого типа называют ζ -функцией Римана:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}.$$

При $z = 3/2$ имеем* $\zeta(3/2) \approx 2,612$. Таким образом, окончательно можно записать

$$M/M_{\text{насыщ}} = 1 - \text{const} \cdot T^{3/2},$$

$$\text{const} = 5,224 \left(\frac{k}{4\pi A} \right)^{3/2}.$$

К главе 14. Зависимость амплитуд от места

- 14.1. а) В стационарном состоянии с энергией E волновая функция одномерного движения записывается в виде

$$\psi(x, t) = u(x) e^{-iEt/\hbar},$$

причем $u(x)$ удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dx^2} + V(x) u = Eu.$$

Для прямоугольной потенциальной ямы с бесконечными стенками граничные условия можно получить из самого уравнения Шредингера. Действительно, пусть $V(x) \rightarrow \infty$ во внешней области ($x < 0$ и $x > a$). Чтобы при этом уравнение Шредингера удовлетворялось, нужно положить либо $u(x) = 0$, либо $d^2 u/dx^2 \rightarrow \infty$ всюду во внешней области. Но в последнем случае и сама функция $u(x)$ должна обращаться в бесконечность во всей внешней области, что не имеет физического смысла. Таким образом, остается принять $u(x) = 0$ при $x < 0$ и $x > a$. С точки зрения физики это означает, что частица не может находиться в области, где потенциальная энергия бесконечно велика.

- б) Во внутренней области $V(x) = 0$, и уравнение Шредингера принимает вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + k^2 u = 0,$$

где $k^2 = 2mE/\hbar^2$. В общем случае решение этого уравнения хорошо известно:

$$u(x) = A \sin kx + B \cos kx.$$

* См., например, Е. Янке, Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, Физматгиз, М., 1959.

Из граничного условия $u(0) = 0$ получаем $B = 0$, а из другого граничного условия $u(a) = 0$ имеем

$$A \sin ka = 0.$$

Поскольку A не может равняться нулю (иначе волновая функция всюду обратится в нуль), получаем условие

$$ka = \pi(n + 1), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Следовательно, допустимые значения энергии равны

$$E_n = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n + 1)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

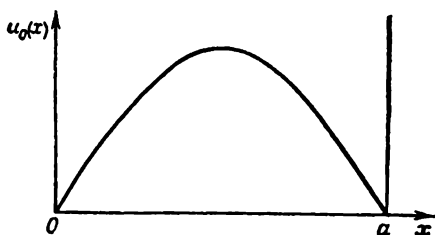
Энергия имеет наименьшее значение при $n = 0$:

$$E_0 = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

Волновая функция состояния с этой энергией равна

$$u_0(x) = \begin{cases} A \sin \frac{\pi x}{a} & \text{при } 0 \leq x \leq a, \\ 0 & \text{при } x < 0 \text{ и } x > a. \end{cases}$$

Ее график приведен на фиг. 1.



Фиг. 1.

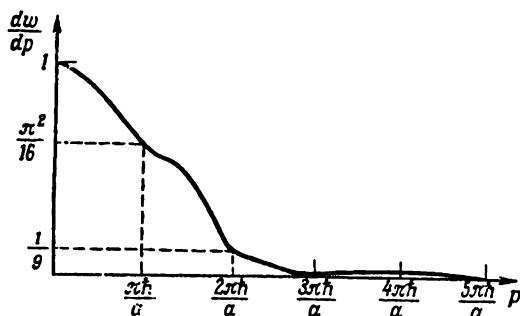
- в) Первому возбужденному состоянию отвечает $n = 1$. Следовательно,

$$E_1 - E_0 = \frac{3\hbar^2 \pi^2}{2ma^2}.$$

- г) Попытаемся сначала качественно рассмотреть распределение частиц по импульсам. Из соображений симметрии ясно, что частица с равной вероятностью может иметь как импульс p , так и $-p$, т. е. среднее значение импульса равно нулю. Кроме того, неопределенность координаты частицы равна $\Delta x = a$, и, следовательно, неопределенность импульса $\Delta p \geq \hbar/2a$. Эти качественные выводы можно сравнить с выражением для точной функции распределения по импульсам

$$\frac{dw(p)}{dp} = \frac{1}{2\pi\hbar} \left| \int_0^a u_0(x) e^{ipx/\hbar} dx \right|^2 = 2A^2 a^2 \pi \hbar^3 \left[\frac{\cos(pa/2\hbar)}{(\pi\hbar)^2 - (pa)^2} \right]^2.$$

Примерный график этой функции показан на фиг. 2. Масштаб по оси ординат произвольный.



Фиг. 2.

14.2. а) Решим уравнение Шредингера

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] u = 0$$

для различных областей потенциала $V(x)$. При $x \leq 0$, как и в предыдущей задаче, $u(x) = 0$. В области $0 < x < a$ получаем $u(x) = A \sin kx$, где $k = \sqrt{2mE/\hbar^2}$. В области $x > a$ общее решение имеет вид

$$u(x) = Ce^{-\kappa x} + De^{\kappa x},$$

где

$$\kappa = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2} (V_0 - E)}.$$

Поскольку в основном состоянии энергия частицы $E < V_0$, постоянную D следует положить равной нулю, иначе при $x \rightarrow \infty$ волновая функция будет возрастать до бесконечности. Теперь следует потребовать, чтобы волновая функция и ее первая производная были непрерывны в точке $x = a$, где потенциал меняется скачком. Эти два условия приводят к непрерывности логарифмической производной волновой функции, т. е. величины $(du/dx)/u(x)$. Вычисляя эту величину для волновой функции, соответствующей областям $0 < x < a$ и $x > a$, и полагая $x = a$, получаем

$$k \operatorname{ctg} ka = -\kappa.$$

Это трансцендентное уравнение определяет допустимые значения энергии частицы в рассматриваемой потенциальной яме. Если энергия известна, то данное уравнение позволяет определить глу-

бину потенциальной ямы:

$$V_0 = \frac{2E}{1 - \cos(2ka)}.$$

Если энергия частицы в основном состоянии отличается на 10% от энергии основного состояния при $V_0 \rightarrow \infty$, то $E_0 = (\pi^2 \hbar^2 / 2ma^2) \times (1 + 0,1)$. Тогда

$$\cos(2ka) = \cos(2\pi \sqrt{1 + 0,1}) \approx \cos \frac{\pi}{10} \approx 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{10} \right)^2.$$

Следовательно,

$$V_0 \approx 400 \frac{\hbar^2}{2ma^2}.$$

б) В первом возбужденном состоянии волновая функция должна иметь один нуль внутри ямы. Поскольку яма симметрична относительно точки $x = 0$, то нуль волновой функции должен приходиться как раз на эту точку. При $x > 0$ волновая функция нашей задачи удовлетворяет такому же уравнению, как и в п. (а). Граничное условие $u(0) = 0$, рассмотренное в задаче 14.1, также выполнено, поэтому энергия первого возбужденного состояния частицы в потенциале, заданном в условии нашей задачи на фиг. 2, совпадает с энергией основного состояния частицы в потенциале на фиг. 1 (см. условие задачи), т. е.

$$E_1 = 1,1 \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2}.$$

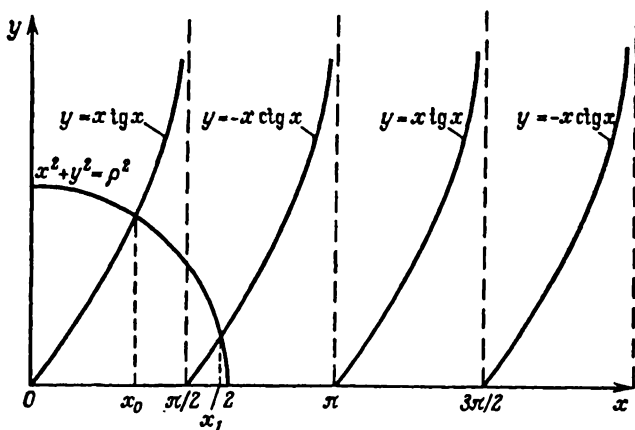
- 14.3. Потенциал $V(x)$ обладает симметрией относительно замены x на $-x$, поэтому существуют два типа решений уравнения Шредингера: четные, т. е. такие, что $u(-x) = u(x)$, и нечетные: $u(-x) = -u(x)$. Для первого типа решений во внутренней области $|x| < a$, имеем $u(x) = B \cos \alpha x$ ($\alpha = \sqrt{2mE/\hbar^2}$), а во внешней области $u(x) = Ce^{-\beta|x|}$ ($\beta = \sqrt{2m(V_0 - E)/\hbar^2}$). Условие непрерывности логарифмической производной функции $u(x)$ при $x = \pm a$ дает трансцендентное уравнение для определения уравнений энергий четных состояний:

$$\alpha \operatorname{tg} \alpha a = \beta.$$

Решения второго типа во внутренней области имеют вид: $u(x) = A \sin \alpha x$, а во внешней области $u(x) = De^{-\beta x}$ при $x > a$ и $u(x) = -De^{\beta x}$ при $x < -a$. Приравнявая при $x = \pm a$ логарифмические производные решений во внутренней и внешней областях, получаем $\alpha \operatorname{ctg} \alpha a = -\beta$.

Полученные уравнения можно решить графическим методом. Введем для этого величины $x = \alpha a$ и $y = \beta a$ и нарисуем окружность $x^2 + y^2 = \rho^2 = 2mV_0 a^2 / \hbar^2$. Энергии четных состояний определяются пересечением этой окружности с кривой $y = x \operatorname{tg} x$, а энергии нечетных состояний — пересечением с кривой $y = -x \operatorname{ctg} x$ при положительных значениях x и y в обоих случаях.

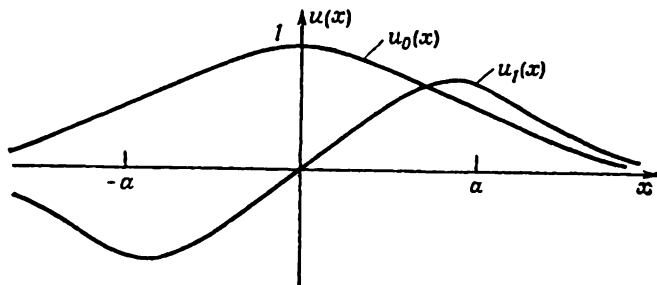
Если $V_0 a^2 = 4\hbar^2/2m$, то радиус окружности $\rho = 2$. Из фиг. 1 видно, что в этом случае окружность пересекается с каждой из кривых один раз, для одной кривой при $x_0 \approx \pi/3$, а для другой — при $x_1 \approx 1,9$. При этом энергия основного состояния $E_0 = \pi^2 \hbar^2/18 m a^2$,



Фиг. 1.

а первого возбужденного $E_1 = 3,6\hbar^2/2ma^2$. На фиг. 2 показана качественно зависимость волновых функций этих состояний от координаты x .

Если $V_0 a^2 < \pi^2 \hbar^2/8m$, то $\rho < \pi/2$, так что будет существовать лишь одно связанное состояние.



Фиг. 2.

- 14.4. Волновая функция $\varphi(x, t) = K \exp[-a(t)x^2 - c(t)]$ должна удовлетворять уравнению Шредингера для свободной частицы:

$$i\hbar \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Выполняя дифференцирование и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях уравнения, получаем

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\hbar}{im} a^2, \quad \frac{dc}{dt} = \frac{i\hbar}{m} a.$$

Интегрирование первого уравнения дает искомое выражение

$$\frac{1}{a(t)} = \frac{1}{a_0} + \frac{2i\hbar}{m} t.$$

Подставляя значение $a(t)$ во второе уравнение и интегрируя его с начальным условием $c(0) = 0$, получаем

$$c = \frac{1}{4} \ln \left[1 + \left(\frac{2\hbar a_0 t}{m} \right)^2 \right] + \frac{i}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\hbar a_0 t}{m} \right).$$

Тогда волновую функцию можно записать следующим образом:

$$\varphi(x, t) = \text{const} \cdot e^{ia(x, t)} (2\pi\sigma^2)^{-1/4} e^{-x^2/4\sigma^2};$$

здесь

$$\sigma^2(t) = \frac{1}{4a_0} \left[1 + \left(\frac{2\hbar a_0 t}{m} \right)^2 \right],$$

$$\alpha(x, t) = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2\hbar a_0 t}{m} \right) + \frac{\hbar a_0 t}{2m} \frac{x^2}{4\sigma^2}.$$

Постоянный множитель $\text{const} = K(2\pi/4a_0)^{1/2}$ удобно выбирать равным единице. Отметим, что нормировка найденной волновой функции не зависит от времени. Ширина «области локализации» частицы меняется с течением времени и характеризуется величиной

$$2\sigma = 2\sigma_0 \sqrt{1 + (2\hbar a_0 t/m)^2}.$$

Если волновая функция описывает электрон, находившийся в начальный момент времени внутри области шириной 1 А, т. е. $2\sigma_0 = 1$ А, то $a_0 = (2\sigma_0)^{-2} = 10^{16} \text{ см}^{-2}$. Через 1 сек волновой пакет «расползется» по области шириной $2\sigma = 2,3 \cdot 10^8 \text{ см} = 2300 \text{ км}$ (!)

Найдем волновую функцию в импульсном представлении:

$$\varphi(p, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, t) e^{-ipx/\hbar} dx =$$

$$= K(2\hbar a)^{-1/2} \exp \left(-\frac{p^2}{4\hbar^2} a - c \right).$$

Если подставить сюда явные выражения для функций $1/a(t)$ и $c(t)$ и проделать несложные преобразования с комплексными числами, то волновую функцию можно привести к виду

$$\varphi(p, t) = \text{const} \cdot e^{-t\beta(p, t)} (2\pi\eta)^{-1/4} e^{-p^2/4\eta^2},$$

где

$$\eta = \hbar \sqrt{a_0}, \quad \beta(p, t) = \frac{p^2}{2m} \frac{t}{\hbar}.$$

Отсюда видно, что разброс по импульсам сохраняется постоянным в любой момент времени.

Чтобы оценить разброс по скоростям, запишем полуширину «области локализации» частицы следующим образом:

$$\sigma^2(t) = \sigma_0^2 + (ut)^2,$$

где величина $u = \hbar \sqrt{a_0}/m$ характеризует скорость расщепления пакета. Эту скорость можно принять в качестве меры разброса по скоростям, причем $u = \eta/m$.

Более строго этот вопрос можно проанализировать, используя введенный в гл. 18 «Лекций» (вып. 9) оператор скорости

$$\hat{v} = -\frac{i\hbar}{m} \frac{d}{dx}.$$

С помощью волновой функции в координатном представлении можно найти среднеквадратичное отклонение скорости частицы от среднего значения, т. е. величину

$$\langle (\hat{v} - \langle \hat{v} \rangle)^2 \rangle = \langle \hat{v}^2 \rangle - \langle \hat{v} \rangle^2.$$

Вычислив соответствующие интегралы, найдем, что среднее значение скорости оказывается равным нулю, $\langle \hat{v} \rangle = 0$, а среднее значение квадрата скорости в точности соответствует ширине разброса по импульсам, т. е.

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\hbar^2 a_0}{m} = \eta^2/m^2.$$

К главе 16. Момент количества движения

- 16.1. В начальном состоянии атома со спином 1 и с нулевой проекцией спина на ось z содержатся состояния со всеми тремя возможными проекциями спина ($m' = 0, \pm 1$) на ось z' , амплитудой испускания фотона вдоль которой мы интересуемся. Однако из этих трех состояний в силу закона сохранения проекции момента импульса лишь состояние $m' = +1$ может излучать правополяризованный фотон. Поэтому интересующая нас величина $A(\theta)$ пропорциональна амплитуде того, что в состоянии атома со спином 1 и с нулевой проекцией спина на ось z содержится состояние с проекцией спина $+1$ на ось z' , направление которой задано полярными углами θ и φ . Следовательно,

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \text{const} \cdot \langle +1 | R_y(\theta) R_z(\varphi) | 0 \rangle = \\ &= \text{const} \cdot \langle +1 | R_y(\theta) | 0 \rangle = \text{const} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta. \end{aligned}$$

- 16.2. а) Пронумеруем конечные состояния, показанные на рисунке в условии задачи, цифрами от 1 до 8 слева направо.

В начальном состоянии проекция спина на ось z равна $+1/2$, поэтому в результате распада могут реализоваться лишь такие конечные состояния, в которых проекция полного момента импульса на ось z равна $+1/2$. Этому условию удовлетворяют лишь состояния 2 и 8. Амплитуды всех остальных состояний должны быть равны нулю.

- б) Пусть поляризованная вдоль оси z частица X распадается, а частица Y движется вдоль оси z' , заданной полярными углами θ и φ . Относительно этой оси проекция спина частицы X могла быть равна $+1/2$ с амплитудой

$$\left\langle +\frac{1}{2} | R_y(\theta) R_z(\varphi) | +\frac{1}{2} \right\rangle = e^{i\varphi/2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

или $-\frac{1}{2}$ с амплитудой

$$\left\langle -\frac{1}{2} | R_y(\theta) R_z(\varphi) | +\frac{1}{2} \right\rangle = -e^{i\varphi/2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

В первом случае сохранение проекции момента импульса приводит к тому, что фотон, движущийся в направлении, противоположном оси $+z'$, является левополяризованным, а проекция спина частицы Y равна $-\frac{1}{2}$. Во втором случае фотон оказывается правополяризованным, а проекция спина частицы Y равна $+\frac{1}{2}$. Обозначим амплитуду первого процесса через a , второго — через b . Тогда угловое распределение частиц Y , поляризованных вдоль направления своего движения, определяется формулой

$$W_+(\theta) = |b \langle -\frac{1}{2} | R_y(\theta) R_z(\varphi) | +\frac{1}{2} \rangle|^2 = (\frac{1}{2}) |b|^2 (1 - \cos \theta).$$

Для частиц Y , поляризованных против направления своего движения, имеем

$$W_-(\theta) = (\frac{1}{2}) |a|^2 (1 + \cos \theta).$$

- в) Угловое распределение всех частиц получается суммированием по различным поляризациям:

$$W(\theta) = W_-(\theta) + W_+(\theta) = (\frac{1}{2}) [|a|^2 + |b|^2 + (|a|^2 - |b|^2) \cos \theta].$$

- г) Если угловое распределение изотропно, то $|a| = |b|$. Процессы, описываемые амплитудами a и b , получаются один из другого зеркальным отражением в плоскости xy и поворотом вокруг оси y на π . Поэтому изотропное угловое распределение, т.е. равенство $|a| = |b|$, означает сохранение четности при испускании фотона.

- 16.3. Проекция момента импульса на ось z у правополяризованного фотона равна $+1$, а у протона — либо $+\frac{1}{2}$, либо $-\frac{1}{2}$, так что проекция m полного момента импульса системы p^* может принимать значения $+\frac{3}{2}$ и $+\frac{1}{2}$. В конечном состоянии проекция момента импульса на ось z' , направленную вдоль импульса протона отдачи, обусловлена только спином протона, поэтому $m' = \pm\frac{1}{2}$.

Пусть протон до столкновения был поляризован вдоль оси $+z$. Тогда система p^* может образоваться лишь в состоянии $|j = \frac{3}{2}, m = +\frac{3}{2}\rangle$ с амплитудой a . Распад на π^0 -мезон и протон, движущийся в направлении оси $+z'$, характеризуемой полярными углами θ и φ , может произойти из состояний $|j = \frac{3}{2}, m' = +\frac{1}{2}\rangle$ и $|j = \frac{3}{2}, m' = -\frac{1}{2}\rangle$. Амплитуды вероятности того, что эти состояния содержатся в состоянии $|j = \frac{3}{2}, m = +\frac{3}{2}\rangle$, определяются матрицей поворота для спина $\frac{3}{2}$. С помощью формулы (16.25) и табл. 16.2 «Лекций» (вып. 9, стр. 413 и 417) получаем

$$\left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} | R_y(\theta) R_z(\varphi) | \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = -\sqrt{3} \sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2},$$

$$\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | R_y(\theta) R_z(\varphi) | \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle = \sqrt{3} \cos \frac{\theta}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2}.$$

Если состояние $|j = \frac{3}{2}, m' = +\frac{1}{2}\rangle$ распадется и протон полетит вдоль оси $+z'$, а мезон — в противоположном направлении, то спин протона обязательно должен быть направлен вдоль оси $+z'$. Если $m' = -\frac{1}{2}$, то спин протона после распада направлен противоположно оси $+z'$. Амплитуды распадов в этих двух случаях равны соот-

ветственно f и g . Теперь мы можем записать полные амплитуды процесса фоторождения π -мезона на протоне:

$$\begin{aligned} \left\langle \mu' = +\frac{1}{2} | F | \mu = +\frac{1}{2} \right\rangle &= f \left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} | R_y(\theta) R_z(\varphi) | \frac{3}{2}, +\frac{3}{2} \right\rangle a = \\ &= -af \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \cos \frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2}, \end{aligned}$$

$$\left\langle \mu' = -\frac{1}{2} | F | \mu = +\frac{1}{2} \right\rangle = ga \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \sin \frac{\theta}{2} e^{3i\varphi/2}.$$

Здесь μ — проекция спина протона на ось z до столкновения, а μ' — проекция спина протона на направление его импульса после столкновения. Другие квантовые числа опущены. Совершенно аналогично можно получить амплитуды для случая $\mu = -1/2$:

$$\left\langle \mu' = +\frac{1}{2} | F | \mu = -\frac{1}{2} \right\rangle = fb \frac{1}{2} (3 \cos \theta - 1) \cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2},$$

$$\left\langle \mu' = -\frac{1}{2} | F | \mu = -\frac{1}{2} \right\rangle = -gb \frac{1}{2} (3 \cos \theta + 1) \sin \frac{\theta}{2} e^{i\varphi/2}.$$

Возводя модули найденных амплитуд в квадрат, усредняя по начальным значениям проекций спина протона и суммируя по конечным, получаем угловое распределение протонов:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{\mu = \pm 1/2} \sum_{\mu' = \pm 1/2} |\langle \mu' | F | \mu \rangle|^2.$$

При вычислении этого выражения учтем равенство $f = g$, которое вытекает из закона сохранения четности. В результате получим

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{8} |f|^2 \{3|a|^2 \sin^2 \theta + |b|^2 (3 \cos^2 \theta + 1)\}.$$

Угловое распределение мезонов получается отсюда заменой $\theta \rightarrow \pi - \theta$, поскольку мезон и протон движутся в противоположных направлениях. Однако при этом полученное выражение не меняется.

- 16.4. Пусть π -мезон падает на мишень вдоль оси $+z$, а проекция спина протона на эту ось равна μ . Рассмотрим такой процесс, когда после рассеяния π -мезон движется вдоль оси z' , характеризующейся полярными углами θ и φ , а проекция спина протона на ось z' равна μ' . При образовании промежуточного состояния $|j = 3/2, m\rangle$ проекция момента импульса системы должна сохраниться; следовательно, $m = \mu$. (Напомним, что проекция орбитального момента частицы на направление ее движения равна нулю.) Точно так же при распаде состояния $|3/2, m'\rangle$ с испусканием мезона вдоль оси $+z'$ должно выполняться равенство $m' = \mu'$. Тогда амплитуду рассматриваемого процесса можно записать как произведение амплитуды f_μ образования состояния $|3/2, \mu\rangle$ на амплитуду обнаружения в этом состоянии другого состояния $|3/2, \mu'\rangle$ с проекцией спина μ' на новую ось z' и на амплитуду $g_{\mu'}$ распада такого состояния с испусканием мезона вдоль оси $+z'$. Вторая из этих амплитуд равна матрице поворота для спина $3/2$:

$$\left\langle \frac{3}{2} \mu' | R_y(\theta) R_z(\varphi) | \frac{3}{2} \mu \right\rangle = \left\langle \frac{3}{2} \mu' | R_y(\theta) | \frac{3}{2} \mu \right\rangle e^{i\mu\varphi}.$$

В нашем случае допустимые значения μ и μ' равны $\pm 1/2$. Из табл. 16.2 «Лекций» (вып. 9, стр. 417) находим амплитуды

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} | R_y | \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle &= \left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | R_y | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= -\frac{1}{2} (3 \cos \theta - 1) \cos \left(\frac{\theta}{2} \right), \\ \left\langle \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} | R_y | \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} \right\rangle &= -\left\langle \frac{3}{2}, -\frac{1}{2} | R_y | \frac{3}{2}, +\frac{1}{2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{2} (3 \cos \theta + 1) \sin \left(\frac{\theta}{2} \right). \end{aligned}$$

С помощью этих амплитуд усреднением по начальным и суммированием по конечным поляризациям протона получаем угловое распределение π -мезонов при рассеянии на неполяризованных протонах:

$$\sigma(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{\mu=\pm 1/2} \sum_{\mu'=\pm 1/2} \left| g_{\mu'} \left\langle \frac{3}{2} \mu' | R_y(\theta) | \frac{3}{2} \mu \right\rangle f_{\mu} \right|^2.$$

Сравним теперь между собой образование промежуточного состояния с $j = 3/2$ в случаях, когда протон поляризован по оси $+z$ и противоположно ей. Если повернуть систему координат на 180° вокруг оси y и затем выполнить операцию зеркального отражения относительно плоскости xy , то направление спина изменится на противоположное, а импульсы сталкивающихся частиц не изменятся. Тогда в силу сохранения четности амплитуды $f_{+1/2}$ и $f_{-1/2}$ могут лишь отличаться несущественным фазовым множителем, так что $|f_{+1/2}| = |f_{-1/2}| = f$. Подобное соотношение справедливо и для амплитуд распада:

$$|g_{+1/2}| = |g_{-1/2}| = g.$$

Следовательно, угловое распределение π -мезонов при рассеянии на неполяризованных протонах принимает простой вид

$$\sigma(\theta) = \text{const} \sum_{\mu, \mu'=\pm 1/2} \left| \left\langle \frac{3}{2} \mu' | R_y(\theta) | \frac{3}{2} \mu \right\rangle \right|^2 = \text{const} (3 \cos^2 \theta + 1).$$

16.5. Определим угловую зависимость амплитуд испускания право- и левополяризованного фотона:

$$\begin{aligned} \langle 0^+, R, \theta \varphi | F | 1^\pi, m=1 \rangle &= a_R^\pi \langle 1, +1 | R_y(\theta) R_z(\varphi) | 1, +1 \rangle = \\ &= a_R^\pi e^{i\varphi} (1 + \cos \theta)/2, \\ \langle 0^+, L, \theta \varphi | F | 1^\pi, m=1 \rangle &= \\ &= a_L^\pi \langle 1, -1 | R_y(\theta) R_z(\varphi) | 1, +1 \rangle = a_L^\pi e^{i\varphi} (1 - \cos \theta)/2. \end{aligned}$$

Здесь верхний индекс π указывает четность возбужденного состояния и принимает значение $+$ или $-$; например, 1^+ означает, что полный спин системы равен единице, а четность положительна; величины a_R^π и a_L^π представляют собой амплитуды излучения вдоль оси $+z'$ фотона с правой и левой круговыми поляризациями, если возбужденный атом находится соответственно в состояниях $|1^\pi, m'=+1\rangle$ и $|1^\pi, m'=-1\rangle$. Для данного значения четности возбужденного состояния π эти амплитуды равны по абсолютной величине, но их относи-

тельный знак (см. § 1 гл. 16 «Лекций», вып. 9, стр. 397) зависит от значения π : $a_R^\pi = \pi a_L^\pi$. Если поляризация фотонов не регистрируется, то угловое распределение не зависит от четности возбужденного состояния:

$$W(\theta) = |\langle 0^+, R, \theta\Phi | F | 1^\pi, m=1 \rangle|^2 + |\langle 0^+, L, \theta\Phi | F | 1^\pi, m=1 \rangle|^2 = \\ = |a_R^\pi|^2 (1 + \cos^2 \theta)/2.$$

Угловое распределение фотонов с круговой поляризацией тоже, очевидно, не зависит от π :

$$W_R(\theta) = \frac{1}{4} |a_R^\pi|^2 (1 + \cos \theta)^2; \quad W_L(\theta) = \frac{1}{4} |a_L^\pi|^2 (1 - \cos \theta)^2.$$

Найдем теперь угловые распределения линейно-поляризованных фотонов. Амплитуда испускания фотона с поляризацией вдоль оси $+x'$ или $+y'$ выражается через амплитуды испускания фотонов с круговой поляризацией:

$$\langle x' | F | 1^\pi m \rangle = \langle x' | R \rangle \langle R | F | 1^\pi m \rangle + \langle x' | L \rangle \langle L | F | 1^\pi m \rangle.$$

$$\langle y' | F | 1^\pi m \rangle = \langle y' | R \rangle \langle R | F | 1^\pi m \rangle + \langle y' | L \rangle \langle L | F | 1^\pi m \rangle.$$

Из соотношений

$$|R\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x\rangle + i|y\rangle\}, \quad |L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{|x\rangle - i|y\rangle\}$$

находим

$$\langle x' | R \rangle = \langle x' | L \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}; \quad \langle y' | R \rangle = -\langle y' | L \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}.$$

Тогда амплитуды испускания линейно-поляризованных фотонов даются выражениями

$$\langle 0^+, x', \theta\Phi | F | 1^\pi, 1 \rangle = \frac{e^{i\Phi} a_R^\pi}{2\sqrt{2}} [(1 + \cos \theta) + \pi(1 - \cos \theta)],$$

$$\langle 0^+, y', \theta\Phi | F | 1^\pi, 1 \rangle = \frac{ie^{i\Phi} a_R^\pi}{2\sqrt{2}} [(1 + \cos \theta) - \pi(1 - \cos \theta)].$$

Квадраты модулей этих амплитуд дают угловые распределения фотонов, поляризованных соответственно вдоль осей $+x'$ и $+y'$. В случае положительной четности возбужденного состояния получаем

$$W_{x'}(\theta) = \frac{1}{2} |a_R^+|^2, \quad W_{y'}(\theta) = \frac{1}{2} |a_R^+|^2 \cos^2 \theta.$$

Если же четность отрицательна, то угловые распределения оказываются иными:

$$W_{x'}(\theta) = \frac{1}{2} |a_R^-|^2 \cos^2 \theta, \quad W_{y'}(\theta) = \frac{1}{2} |a_R^-|^2.$$

Если вспомнить, каким образом мы переходим от оси z к оси z' , то легко убедиться, что ось x' лежит в плоскости, проведенной через направление ориентации спина возбужденного состояния и направление излучения фотона, а ось y' перпендикулярна этой плоскости.

Таким образом, по угловому распределению линейно-поляризованных фотонов можно определить четность возбужденного состояния.

ОГЛАВЛЕНИЕ

УСЛОВИЯ ЗАДАЧ

Том II

Вып. 5. Электричество и магнетизм	5
Вып. 6. Электродинамика	31
Вып. 7. Физика сплошных сред	56

Том III

Вып. 8. Квантовая механика (I)	65
Вып. 9. Квантовая механика (II)	86

РЕШЕНИЯ И ОТВЕТЫ

Том II

Вып. 5. Электричество и магнетизм	98
Вып. 6. Электродинамика	142
Вып. 7. Физика сплошных сред	187

Том III

Вып. 8. Квантовая механика (I)	203
Вып. 9. Квантовая механика (II)	245

Ф Л Ф



Вниманию читателя предлагается знаменитый курс лекций по общей физике, который выдающийся американский физик, Нобелевский лауреат Ричард Фейнман читал в Калифорнийском технологическом институте.

Лекции Фейнмана не похожи ни на один известный курс. Они отличаются оригинальным методом изложения, в котором отразилась яркая научная индивидуальность автора, его точка зрения на пути обучения студентов физике, его умение заразить читателей интересом к науке. Последовательность изложения и выбор материала также отличаются от традиционных. В лекциях не тратится время на объяснение «ученым языком» того, что современный читатель уже знает или слышал. Зато в них увлекательно рассказывается о том, как человек изучает окружающую его природу, какое положение занимает физика в ряду других наук, какие проблемы наука решает сегодня и будет решать завтра.

В рассказе Фейнмана ярко отражаются те причины, которые побуждают физика вести тяжелую работу исследователя, а также те сомнения, которые у него возникают, когда он сталкивается с трудностями, кажущимися непреодолимыми. Эти лекции помогают не только понять, почему интересно заниматься наукой, но и почувствовать, какой дорогой ценой достаются победы и как порой бывают тяжелы пути, к ним ведущие.



5.9
и
ЗАДАЧИ
УПРАЖНЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО **УРСС**
НАУЧНОЙ И УЧЕБНОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Тел./факс: 7 (095) 135-42-16
Тел./факс: 7 (095) 135-42-46



2429 ID 20604



9 785354 007073 >

Любые замечания и предложения по изданию, а также замеченные опечатки присылайте по адресу **URSS@URSS.ru**. Полный список замеченных опечаток можно будет увидеть на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине:

<http://URSS.ru>